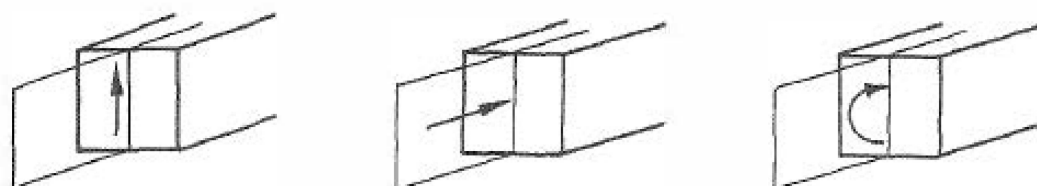


DIMENSIONAMENTO DELLE SEZIONI

Ogni sezione di trave è sottoposta, a meno che le forze esterne non siano nulle, a delle sollecitazioni cui il materiale impiegato deve essere in grado di reagire. Il problema del dimensionamento della sezione è appunto quello di stabilire una condizione di resistenza ottimale alle sollecitazioni agenti sulla trave, in modo che le sollecitazioni agenti su ogni sezione non facciano superare al materiale le massime tensioni ammissibili. In genere si assume come tensione ammissibile σ_a una tensione molto lontana dal limite di snervamento. Il coefficiente di sicurezza aumenta quanto maggiore è il rapporto tra il σ di snervamento e il σ_a assunto. Nel dimensionamento di una sezione dunque bisogna tenere presenti tutte le tensioni agenti sulla sezione. Esse sono:

NEL PIANO



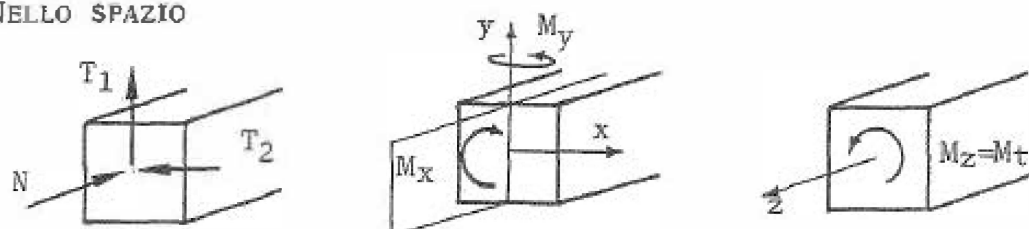
- 1) tensioni tangenziali τ da uno sforzo di taglio: 2) tensioni normali σ prodotte da uno sforzo di compressione (o trazione): 3) tensioni normali σ prodotte da un momento flettente:

$$\tau = \frac{TS_i}{Ib_i}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

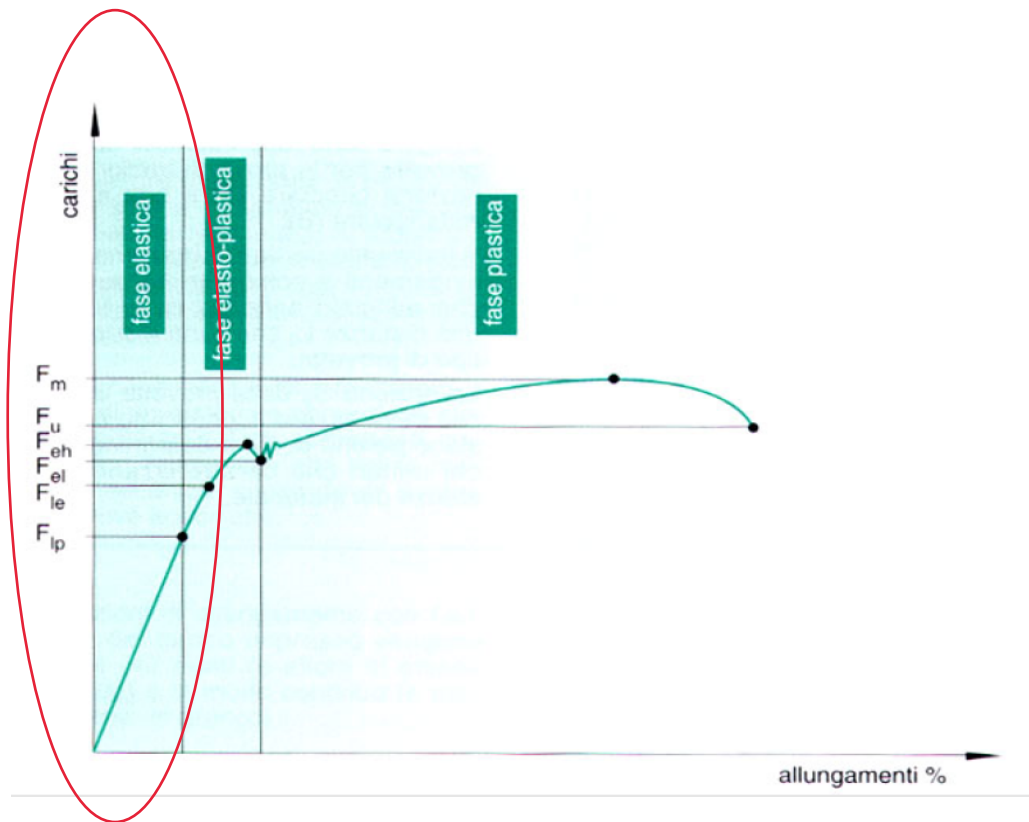
NELLO SPAZIO



Una forza applicata nel baricentro della sezione, se non giace sul piano di simmetria delle sezioni, ha 3 componenti: uno sforzo normale N e due componenti dello sforzo di taglio T_1 e T_2 .

Nello spazio vi possono essere 3 rotazioni: intorno ad x , y e intorno all'asse z della trave. Le rotazioni intorno ad x e ad y corrispondono alle 2 flessioni rette in cui è scomponibile una flessione deviata.

Alla rotazione intorno all'asse z (asse della trave), corrisponde il momento torcente che produce tensioni tangenziali τ .



7

Sollecitazioni

7.1 SFORZO NORMALE SEMPLICE (trazione o compressione) (fig. 7.1)

La risultante delle forze esterne è applicata nel baricentro della sezione considerata, con linea di azione perpendicolare alla sezione stessa.

Tensioni Normali $\sigma = \frac{N}{A}$

Deformazione $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$

- dove:
- $A = b \cdot h =$ area della sezione;
 - $N =$ sforzo normale;
 - $\sigma =$ tensione normale interna;
 - $\sigma_{am} =$ tensione normale ammissibile;
 - $\Delta l =$ deformazione totale (accorciamento o allungamento);
 - $l =$ lunghezza iniziale;
 - $E =$ modulo di elasticità normale (vedi tabella 6.1);
 - $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon =$ deformazione unitaria.

Le formule sono applicabili quando il solido non è caricato di punta, ossia quando risulta:

$$\frac{l_1}{a} \leq m$$

- dove:
- $l_1 =$ lunghezza libera di inflessione;
 - $a =$ minore dimensione della sezione;
 - $m =$ coefficiente con valore variabile in funzione del tipo di materiale (vedi carico di punta, paragrafo 7.10).

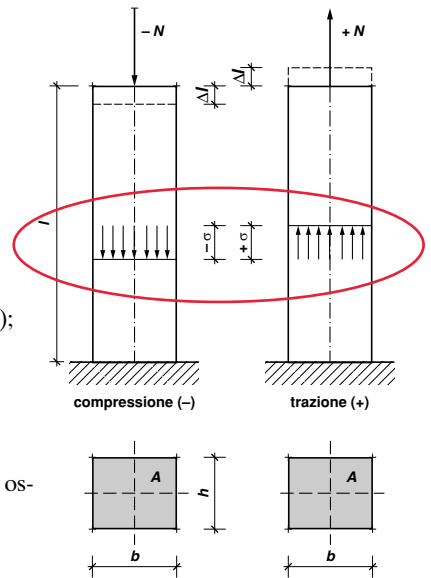


Fig. 7.1

Deformazione e tensione per variazioni di temperatura

— Deformazione totale: allungamento o accorciamento per aumento o diminuzione della temperatura:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$$

- dove: $\alpha =$ coefficiente di dilatazione lineare;
 $l =$ lunghezza iniziale dell'elemento;
 $\Delta t =$ variazione di temperatura.

— Deformazione unitaria:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta t$$

— Se gli estremi dell'elemento non sono liberi di spostarsi, si verifica un incremento σ_t della tensione dovuta ai carichi esterni:

$$\sigma_t = E \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

7.2 TAGLIO SEMPLICE (o scorrimento) (fig. 7.2)

La risultante V delle forze esterne è applicata nel baricentro della sezione considerata e la sua linea di azione giace nel piano della sezione stessa.

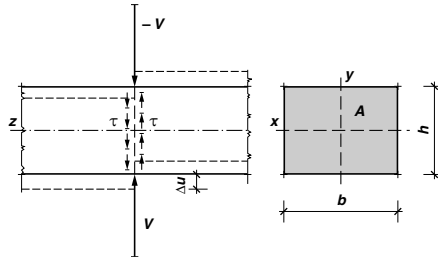


Fig. 7.2

Tensioni tangenziali $\tau = \frac{V}{A}$

Scorrimento $\Delta u = \chi \cdot \frac{V}{G \cdot A}$

- dove:
- $A = b \cdot h$ = area della sezione;
 - V = sforzo di taglio;
 - τ = tensione tangenziale interna;
 - τ_{am} = tensione tangenziale ammissibile;
 - χ = fattore di taglio che assume i valori:
 - sezione rettangolare e quadrata: $\chi = 1,2$;
 - sezione circolare: $\chi = 1,111$;
 - sezione a doppio T: $\chi = \frac{A}{b_1 \cdot h}$
- (A = area della sezione; b_1 = spessore dell'anima; h = altezza totale della sezione);
 G = modulo di elasticità tangenziale (vedi tabella 6.1).

7.3 FLESSIONE SEMPLICE RETTA

- Caratteristiche della sollecitazione:
- è valida l'ipotesi di Bernoulli-Navier;
 - il piano di flessione coincide con il piano di sollecitazione contenente le coppie uguali e contrarie;
 - asse di sollecitazione $s-s$ e asse neutro $n-n$ (fig. 7.3) sono assi principali d'inerzia;
 - le coppie applicate a un elemento determinano la deformazione del suo asse, inizialmente rettilineo, secondo una curva detta *linea elastica* (fig. 7.4).

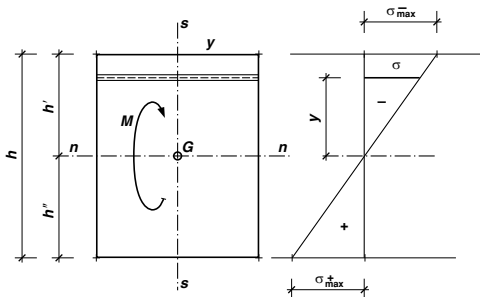


Fig. 7.3

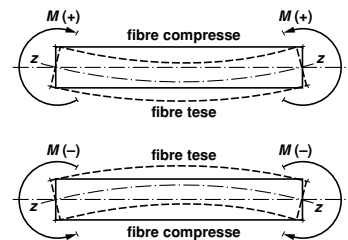


Fig. 7.4

Tensioni normali flessione (o di Navier) $\sigma = \mp \frac{M}{W}$

dove: M = momento flettente;

σ = tensione normale interna;

σ_{am} = tensione normale ammissibile;

W = modulo di resistenza = $\frac{I}{y}$;

I = momento d'inerzia baricentrico della sezione;

y = distanza della fibra considerata dall'asse neutro baricentrico (di norma la fibra più lontana).

Le tensioni variano linearmente con valore massimo ai lembi estremi e nullo in corrispondenza dell'asse neutro.

È necessario tenere presente che:

— l'asse neutro è asse di simmetria della sezione e il materiale che costituisce la trave ha uguale resistenza a trazione e a compressione (fig. 7.3), per cui $h' = h''$:

$$|\sigma_{max}^+| = |\sigma_{max}^-|$$

— l'asse neutro non è asse di simmetria della sezione e il materiale che costituisce la trave ha uguale resistenza a trazione e compressione (fig. 7.5), per cui $h' \neq h''$:

$$|\sigma_{max}^+| \neq |\sigma_{max}^-|$$

$$W' = \frac{I_n}{h'} \quad W'' = \frac{I_n}{h''}$$

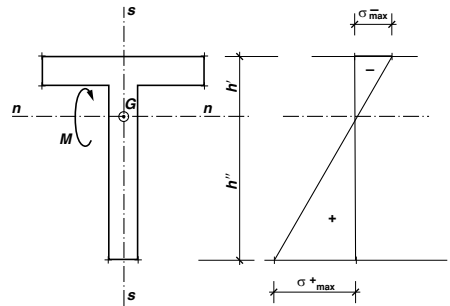


Fig. 7.5

7.4 FLESSIONE SEMPLICE DEVIATA (fig. 7.6)

L'asse di sollecitazione $s-s$ e l'asse neutro $n-n$ non sono assi principali d'inerzia, ma due assi coniugati qualsiasi e quindi non sono perpendicolari.

Tensioni normali flessione deviata

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \mp \frac{M_x}{W_x} \mp \frac{M_y}{W_y}$$

$$M_x = M \cdot \cos \alpha \quad M_y = M \cdot \sin \alpha$$

dove:

M = momento flettente;

W_x = modulo di resistenza massimo;

W_y = modulo di resistenza minimo;

σ_x = tensione normale interna;

σ_{am} = tensione normale ammissibile a flessione.

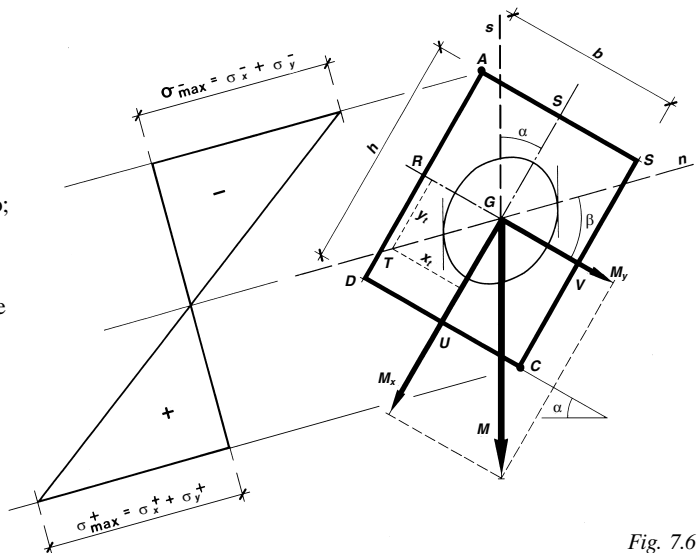


Fig. 7.6

Posizione dell'asse neutro

L'asse neutro n viene definito nei seguenti modi:

1) l'asse n è coniugato all'asse di sollecitazione s (fig. 7.6) e quindi la sua posizione può essere determinata tramite l'elisse centrale d'inerzia;

— si calcola l'angolo β (fig. 7.6) che l'asse neutro forma con l'asse x : $\text{tg } \beta = \frac{I_x}{I_y} \cdot \text{tg } \alpha$;

2) vengono ricercati i punti R ed S nei quali la somma delle tensioni σ_x e σ_y è uguale a zero, ossia i punti con tensione nulla (fig. 7.7); sulla parte negativa del diagramma a si ricerca il segmento $EE' = \sigma_x^-$ con tensione uguale a σ_y^+ , il cui prolungamento interseca in S il lato BC sul quale si verifica la tensione σ_y^+ .

Uguale procedimento viene applicato per determinare il punto R nel quale $|\sigma_y^+| = |\sigma_x^-|$.

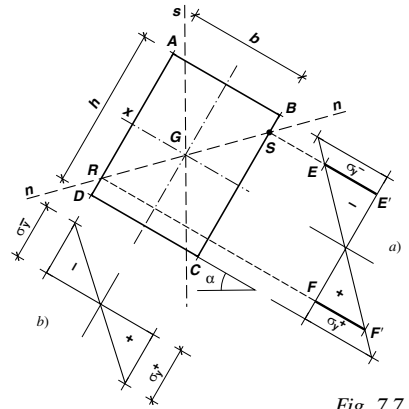


Fig. 7.7

Calcolo della freccia (fig. 7.8)

$$f = f_1 + f_2 = f_b \cdot \text{sen } \alpha + f_h \cdot \text{cos } \alpha$$

dove:

f_b = freccia dovuta alla componente del carico agente secondo l'asse x_0 ;

f_h = freccia dovuta alle componenti del carico agenti secondo l'asse y_0 .

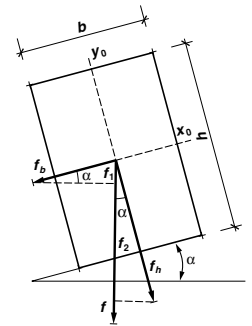


Fig. 7.8

7.5 TORSIONE SEMPLICE

Le forze esterne P che precedono una sezione generica appartengono a un piano α che non contiene l'asse geometrico z dell'elemento, generando il momento torcente $M_t = P \cdot d$ (fig. 7.9a), che è quindi soggetto a due coppie uguali e contrarie agenti alle estremità e appartenenti a due piani perpendicolari (fig. 7.9b).

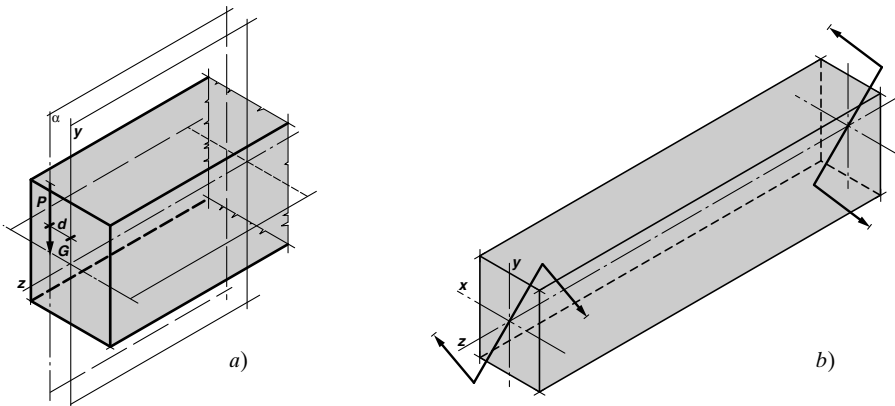


Fig. 7.9

Sezione circolare piena (fig. 7.10)

Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot D^4}$$

- dove: M_t = momento torcente;
 W_t = modulo di resistenza a torsione;
 τ = tensione tangenziale per torsione;
 τ_{am} = tensione tangenziale ammissibile per torsione;
 $D = 2 \cdot R$ = diametro della sezione;
 l = lunghezza dell'elemento;
 G = modulo di elasticità tangenziale;
 φ = angolo di torsione totale fra due sezioni (in radianti).

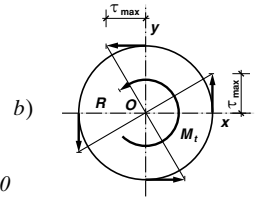
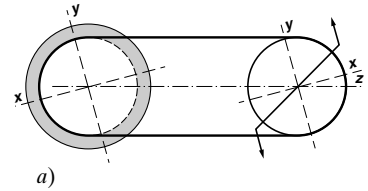


Fig. 7.10

La distribuzione delle tensioni è lineare dal centro al contorno.

Sezione circolare cava (fig. 7.11)

Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot (D_e^3 - D_i^3)}{16}$$

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot (D_e^4 - D_i^4)}$$

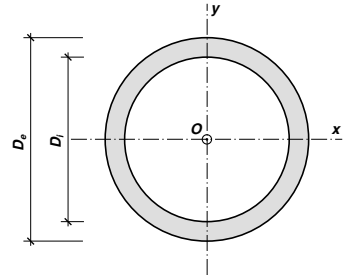


Fig. 7.11

Le notazioni hanno il significato prima riportato per la sezione circolare.

Sezione rettangolare (fig. 7.12)

Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{M_t}{b \cdot h^2}$$

- dove: M_t = momento torcente;
 b e h = dimensioni della sezione;
 G = modulo di elasticità tangenziale;
 α = coefficiente di forma variabile in funzione del rapporto b/h .

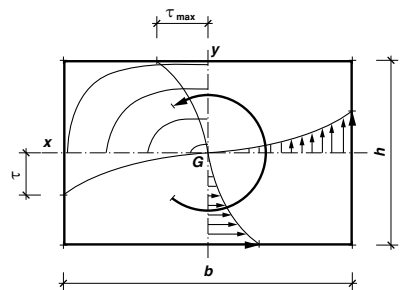


Fig. 7.12

Tabella 7.1 Valori dei coefficienti α e β .

b/h	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
α	4,804	4,67	4,57	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,16
b/h	2	2,5	3	4	5	6	8	10	20
α	4,07	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10

Variazione delle tensioni tangenziali per torsione:

- *lungo le diagonali*: valore nullo in G , quindi crescono per poi diminuire e avere valore nullo in corrispondenza dei vertici;
- *lungo le mediane*: valore nullo in G , quindi crescono assumendo valore massimo nella mezzeria dei lati.

Nella deformazione per torsione di una sezione rettangolare, questa non si conserva piana ma presenta delle gobbe.

Profilati metallici (esclusi i tubolari)

Sono costituiti da rettangoli e hanno una resistenza molto limitata nei confronti della torsione, con tensione massima sui bordi del rettangolo maggiore di spessore s_{max} :

$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot M_t \cdot s_{max}}{\sum_{i=1}^{i=n} (a_i \cdot s_i^3)}$$

dove:

a_i ed s_i = larghezza e spessore dei rettangoli formanti il profilato.

7.6 FLESSIONE SEMPLICE RETTA E TAGLIO (fig. 7.13)

La sezione è contemporaneamente sollecitata da un momento flettente M e da uno sforzo di taglio V . *Principio di reciprocità*: in ogni punto della sezione di un elemento strutturale le tensioni tangenziali τ normali e parallele al suo asse sono uguali.

Sezione generica

Verifica della sezione

— per flessione: $\sigma_x = \frac{M}{W}$ (formula di Navier)

— per taglio: $\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b}$ (formula di Jourawski "leggi Giroschi")

- dove:
- V = sforzo di taglio nella sezione considerata;
 - S = momento statico della parte di sezione compresa fra il lembo superiore e la corda considerata;
 - I = momento d'inerzia baricentrico dell'intera sezione;
 - b = lunghezza della corda considerata.

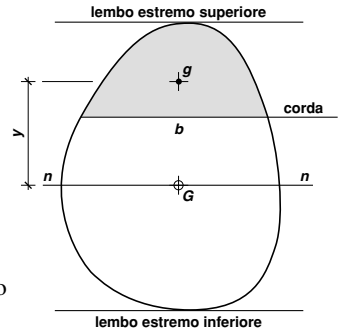


Fig. 7.13

Le tensioni tangenziali variano con legge parabolica, assumendo valore nullo ai lembi estremi della sezione e massimo in corrispondenza dell'asse neutro baricentrico.

Il valore delle tensioni normali σ per flessione ha generalmente valore maggiore rispetto a quello tangenziale τ ; quindi la sezione viene progettata a flessione semplice e successivamente si procede al calcolo di verifica.

Sezione rettangolare (fig. 7.14)

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$

- dove:
- V = sforzo di taglio;
 - $A = b \cdot h$ = area della sezione.

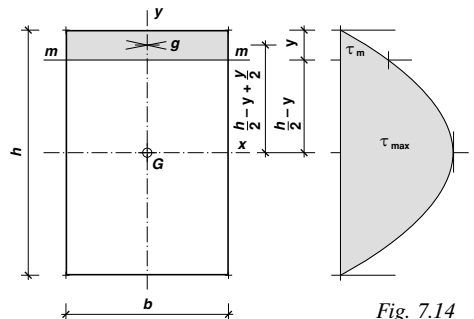


Fig. 7.14

Sezione circolare (fig. 7.15)

$$\tau_m = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{\pi \cdot \frac{D^2}{4}} \cdot \text{sen} \frac{\omega}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{\pi \cdot \frac{D^2}{4}} \leq \tau_{\text{am}}$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali è un semicerchio.

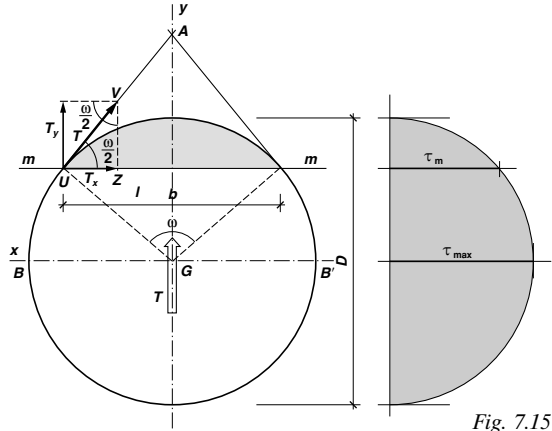


Fig. 7.15

Sezione a T (fig. 7.16)

$$\tau_1 = \frac{V \cdot S_m}{I_x \cdot b_1} \quad \tau_2 = \frac{V \cdot S_m}{I_x \cdot b_0}$$

dove: $S_m = b_1 \cdot s \cdot \left(y_0 - \frac{s}{2} \right)$

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot S_n}{I_x \cdot b_0}$$

dove: $S_n = b_1 \cdot s \cdot \left(y_0 - \frac{s}{2} \right) + b_0 \cdot (y_0 - s) \cdot \frac{y_0 - s}{2}$

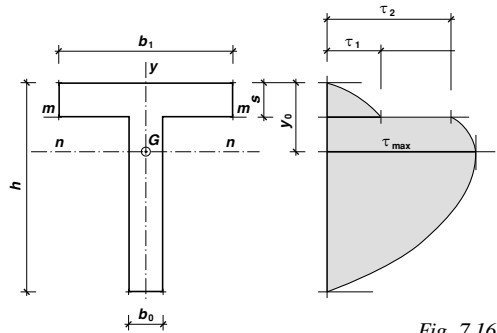


Fig. 7.16

Sezione a doppio T (fig. 7.17)

$$\tau_1 = \frac{V \cdot S_m}{I_x \cdot B} \quad \tau_2 = \frac{V \cdot S_m}{I_x \cdot (B - b)}$$

dove: $S_m = B \cdot \frac{H^2 - h^2}{8}$ $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{B - b} \cdot \frac{B \cdot H^2 - b \cdot h^2}{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}$

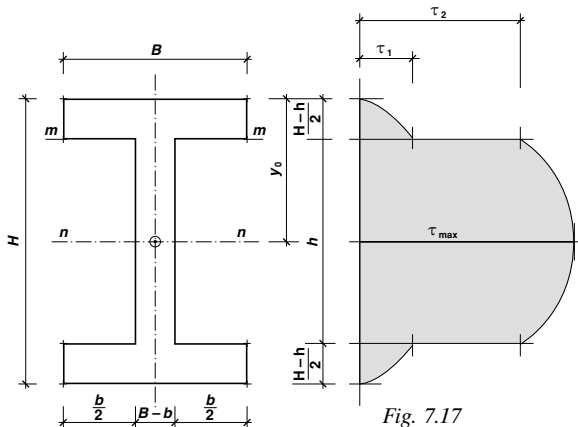


Fig. 7.17

7.7 SFORZO NORMALE E FLESSIONE SEMPLICE RETTA

La sezione è contemporaneamente sollecitata da uno sforzo normale N e da un momento flettente M (fig. 7.18) che agisce in un piano passante per uno degli assi principali d'inerzia della sezione, oppure da uno sforzo normale N eccentrico (fig. 7.19).

Lo sforzo normale può essere di trazione (tenso-flessione) oppure di compressione (presso-flessione) (figg. 7.18 e 7.19).

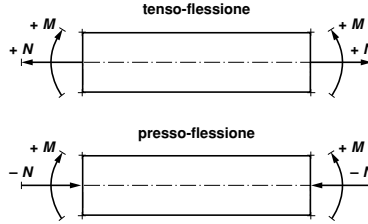


Fig. 7.18

Sezione generica

Verifica di stabilità

— Tenso-flessione:
$$\sigma = + \frac{N}{A} \mp \frac{M}{W}$$

— Presso-flessione:
$$\sigma = - \frac{N}{A} \mp \frac{M}{W}$$

dove: N = sforzo normale;
 A = area della sezione;
 $M = P \cdot e$ = momento flettente.

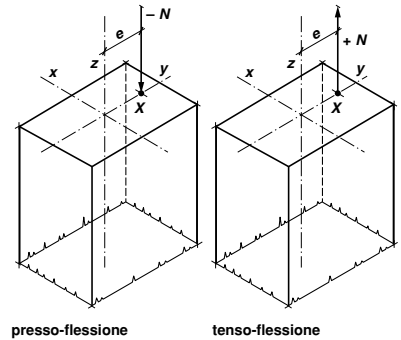


Fig. 7.19

Posizione dell'asse neutro (fig. 7.20)

$$y_n = - \frac{I}{A} \cdot \frac{1}{e} = - \frac{i^2}{e}$$

dove: e = eccentricità dello sforzo normale;
 y_n = distanza dell'asse neutro dall'asse baricentrico;
 i = raggio d'inerzia.

Generalmente il progetto della sezione viene effettuato in funzione della sollecitazione di flessione per le travi, nelle quali è in genere più gravosa, mentre nei pilastri, con eccentricità non grande, si considera lo sforzo normale; si procede quindi al calcolo di verifica.

Sezione rettangolare

Le formule sono relative alla presso-flessione che è il caso più frequente.

Verifica di stabilità
$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(-1 \mp \frac{6 \cdot e}{h} \right)$$

Posizione dell'asse neutro
$$y = - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{e}$$

In tutte le formule relative alla sezione rettangolare il termine h rappresenta sempre la dimensione parallela all'asse di simmetria sul quale è applicato lo sforzo normale N .

1° CASO:

$e = h/6$ (oppure $b/6$) (fig. 7.20)

$$\sigma_{\min}^- = 0 \quad \sigma_{\max}^- = -\frac{2 \cdot N}{A} \quad y = -\frac{h}{2}$$

La sezione è tutta compressa.

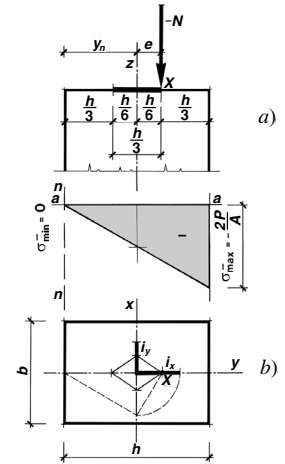


Fig. 7.20

2° CASO:

$e > h/6$ (oppure $b/6$) (fig. 7.21)

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{N}{A} \cdot \left(-1 + \frac{6 \cdot e}{h}\right)$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{N}{A} \cdot \left(-1 - \frac{6 \cdot e}{h}\right)$$

La sezione è in parte compressa e in parte tesa.

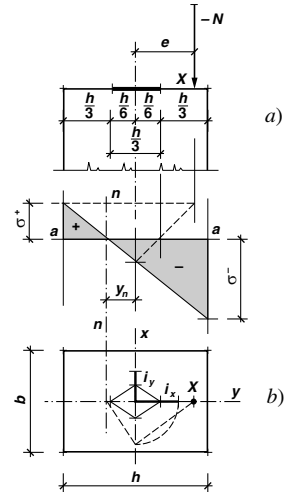


Fig. 7.21

3° CASO:

$e < h/6$ (oppure $b/6$) (fig. 7.22)

$$\sigma_{\max}^- = \frac{N}{A} \cdot \left(-1 - \frac{6 \cdot e}{h}\right)$$

$$\sigma_{\min}^- = \frac{N}{A} \cdot \left(-1 + \frac{6 \cdot e}{h}\right)$$

La sezione è tutta compressa.

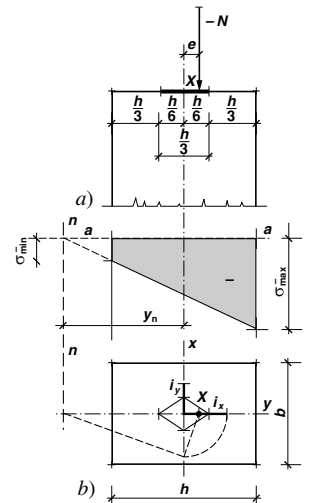


Fig. 7.22

Sezione circolare (fig. 7.23)

Presso-flessione:

$$\sigma = \frac{4 \cdot N}{\pi \cdot D^2} \cdot \left(-1 \mp \frac{8 \cdot e}{D} \right)$$

essendo D il diametro della sezione.

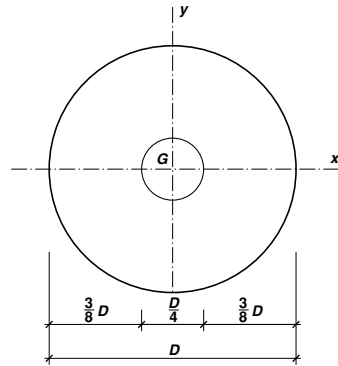


Fig. 7.23

Sezione a corona circolare

Presso-flessione:

$$\sigma = \frac{4 \cdot N}{\pi \cdot (D^2 - d^2)} \cdot \left(-1 \mp \frac{8 \cdot e \cdot D}{D^2 + d^2} \right)$$

essendo D il diametro esterno e d il diametro interno.

Materiali non resistenti a trazione (fig. 7.24)

Quando $e > h/6$ la sezione reagente è detta *sezione parzializzata* in quanto è solo una parte di quella geometrica.

Per la sezione rettangolare si ha:

$$\sigma_{\max} = - \frac{2 \cdot N}{3 \cdot u \cdot b}$$

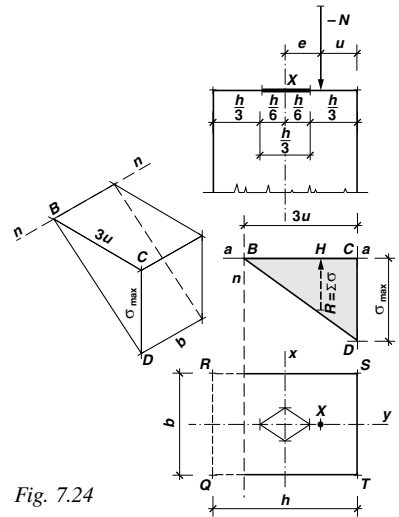


Fig. 7.24

7.8 SFORZO NORMALE E FLESSIONE SEMPLICE DEVIATA

Lo sforzo normale N è applicato in un punto X della sezione, al di fuori degli assi principali d'inerzia (fig. 7.25); applicando il momento di trasporto si ottiene:

- la forza N viene trasportata nel baricentro G (fig. 7.26a) generando uno sforzo normale;
- si aggiunge il momento $M = N \cdot e$ agente nel piano di sollecitazione perpendicolare alla sezione e contenente un asse d'inerzia generico $s-s$ (fig. 7.26a);
- il momento M si considera tramite le sue due componenti (fig. 7.26b):

$$M_x = N \cdot e_x \quad M_y = N \cdot e_y$$

per cui si hanno due flessioni semplici.

Si considera il caso più comune della pressoflessione deviata (figg. 7.25 e 7.26).

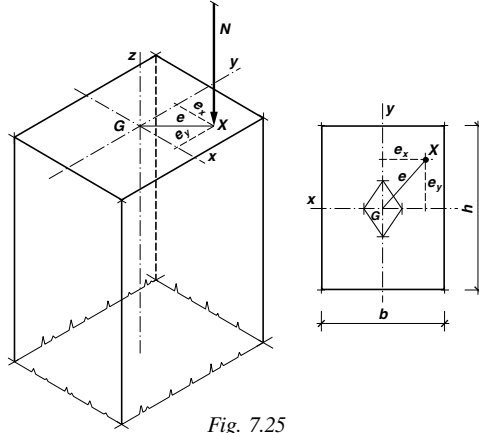


Fig. 7.25

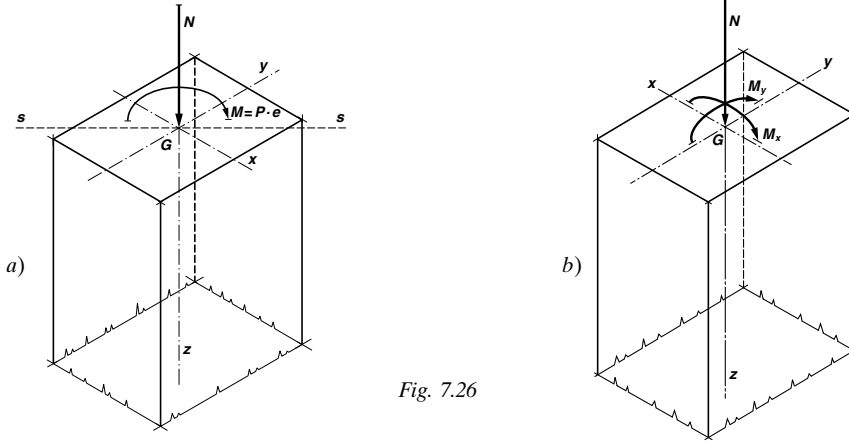


Fig. 7.26

Sezione rettangolare

Verifica della sezione (fig. 7.27)

$$\sigma = -\frac{N}{A} \mp \frac{M_x}{W_x} \mp \frac{M_y}{W_y}$$

dove: $M_x = N \cdot e_y$ e $M_y = N \cdot e_x$.

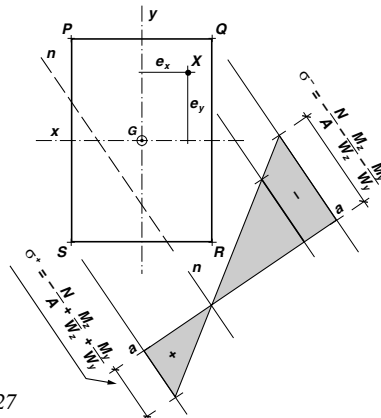


Fig. 7.27

Posizione dell'asse neutro (fig. 7.28)

Può essere determinato con il procedimento grafico, oppure come congiungente i punti *A* e *B*, essendo:

$$\overline{GA} = \frac{i_{x_0}^2}{e_y}$$

$$\overline{GB} = \frac{i_{y_0}^2}{e_x}$$

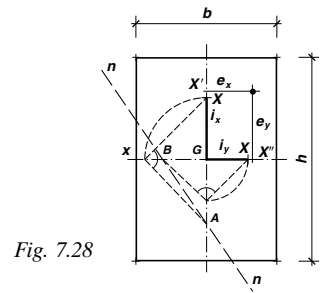


Fig. 7.28

7.9 SFORZO NORMALE, FLESSIONE SEMPLICE RETTA E TAGLIO (fig. 7.29)

Calcolo di verifica

— Tensioni per presso-flessione:

$$\sigma = -\frac{N}{A} \mp \frac{M}{W}$$

— Tensioni per taglio:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b}$$

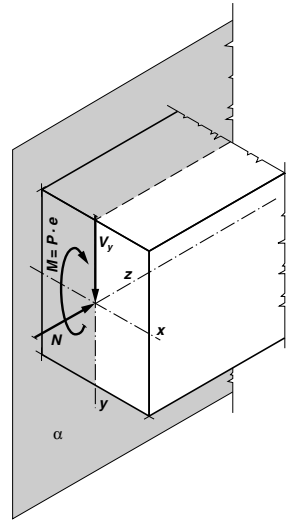


Fig. 7.29

7.10 CARICO DI PUNTA (o instabilità elastica)

La sollecitazione di carico di punta (o di instabilità flessionale) si verifica quando una dimensione della sezione dell'elemento strutturale è molto limitata nei confronti della sua lunghezza, per cui l'elemento è soggetto a una inflessione laterale, il cui valore dipende dal tipo dei vincoli di estremità; questo fenomeno è dovuto agli effetti del secondo ordine quali:

- imperfezioni meccaniche: il materiale non è perfettamente omogeneo;
- imperfezioni geometriche: il solido non è perfettamente prismatico o cilindrico;
- piccola eccentricità del punto di applicazione del carico.

Si verifica il carico di punta quando:

$$\frac{l_1}{a} > m$$

dove:

a = minore dimensione della sezione;

m = coefficiente che assume i valori:

- m* = 12 per il legno;
- m* = 20 per l'acciaio;
- m* = 10 per la ghisa;
- m* = 15 per il cemento armato;

*l*₁ = lunghezza libera di inflessione, in funzione del tipo dei vincoli alle estremità (fig. 7.30) e rappresenta la distanza fra i due punti estremi entro i quali è compresa la deformazione, come risulta dai quattro casi di Eulero; di norma vengono considerati solo il 1° e 2° caso.

Carico di Eulero

Il *carico di Eulero* o carico critico (P_{cr}) è quello che determina nel solido la condizione di equilibrio limite, oltre il quale si verifica l'instabilità flessionale:

$$P_{cr} = \frac{\pi \cdot E \cdot I_{\min}}{l_1^2}$$

$E \cdot I_{\min}$ = rigidezza flessionale.

— Rapporto di snellezza:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{\min}} \quad (\text{acciaio: } \lambda_{\text{lim}} = 85 \div 90; \text{ legno: } \lambda_{\text{lim}} = 80 \div 100)$$

Per l'applicabilità della formula di Eulero è necessario che risulti $\lambda > \lambda_{\text{lim}}$ in modo che l'instabilità si verifichi in campo elastico.

— Tensione critica euleriana: $\sigma_r = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$

