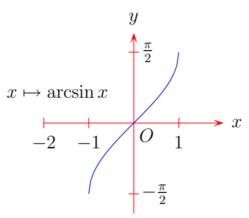
Luciano Battaia, Maddalena Falanga

Formulario commentato

Raccolta di alcune formule di Matematica di base



28 agosto 2007

Premessa

In questo manuale sono raccolte alcune delle formule più importanti della matematica di base (esclusa l'analisi) indispensabili come prerequisiti per i primi corsi universitari di matematica. Le formule e i risultati non sono presentati in ordine sequenziale, ma opportunamente raggruppati in capitoli.

La versione proposta è largamente provvisoria e destinata solo ad uso interno dei Licei Grigoletti e Leopardi-Majorana di Pordenone.

Gli studenti che vi riscontreranno errori ed omissioni sono pregati di comunicarceli all'indirizzo batmath@gmail.com.

Notazioni

— $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali, compreso lo zero. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
— $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
— $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali. $\mathbb{Q} = \{{}^{m}/{}_{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
— $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.
— Notazioni per gli intervalli di numeri reali[1]:
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$
  - $]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$
  - $[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$
  - $]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$
  - $]-\infty, b] = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\}$
  - $]-\infty, b[= (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < qb\}$
  - $[a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\}$
  - $]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}$

[1] Sconsigliamo l'uso delle notazioni con le parentesi tonde, anche se si tratta di una convenzione molto diffusa, in quanto è facile confondere la coppia (a, b) con l'intervallo aperto (a, b).

Indice

1 Numeri

1.1 Numeri naturali e interi

1.1. *La divisione con resto nei naturali.*

Dati due naturali a e b, con $b > 0$, esiste una ed una sola coppia (q, r) di numeri naturali, con $r < b$ (e ovviamente $r > 0$), tali che:

$$a = qb + r\,.$$

Il numero q è detto *quoziente*, il numero r è detto *resto* della divisione (intera) tra a e b. Se $r = 0$ si dice che a è *multiplo* di b, e che b è un *divisore* di a.

1.2. *Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di due numeri. Algoritmo delle divisioni successive.*

Dati due numeri naturali positivi a e b, si eseguano successivamente le divisioni intere:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 && \text{con } r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2 && \text{con } r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 && \text{con } r_3 < r_2 \\
&\ \vdots && \quad\vdots
\end{aligned}$$

Il procedimento ha termine quando si trova un resto 0. Allora il massimo comun divisore è l'ultimo resto non nullo. Per trovare il minimo comune multiplo basta poi ricordare che il prodotto tra il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo è uguale al prodotto ab dei due numeri.

1.3. *Qualche criterio di divisibilità.*

— Un numero è divisibile per 3 o per 9 se e solo se è divisibile per 3 o per 9 la somma delle sue cifre.
— Un numero è divisibile per 4 se e solo se è divisibile per 4 il numero formato dalle ultime due cifre.
— Un numero è divisibile per 8 se e solo se è divisibile per 8 il numero formato dalle ultime tre cifre.
— Un numero è divisibile per 11 se e solo è divisibile per 11 il numero dato dalla somma delle cifre di posto pari, meno quello dato dalla somma delle cifre di posto dispari.

1.4. *Scomposizione di un numero in fattori primi. Teorema fondamentale dell'aritmetica.*

Ogni numero naturale diverso da 1 o è primo o si può scomporre in un prodotto di fattori primi. Tale scomposizione è unica a meno dell'ordine in cui compaiono i fattori.

$$n = p_1^{m_1} \times p_2^{m_2} \times \cdots \times p_r^{m_r} .$$

1.2 Numeri razionali e reali

1.5. *Rappresentazione decimale di un numero razionale.*

Ogni numero razionale può essere scritto in forma decimale, finita o periodica. I numeri decimali con periodo 9 sono detti decimali impropri e non si ottengono mai con l'algoritmo della divisione. Escludendo i decimali impropri, la corrispondenza tra numeri decimali finiti o periodici e numeri razionali è *biunivoca* e precisamente, dato un numero razionale $^m/_n$, con m ed n primi tra di loro, ed $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, si ha:

— se il denominatore ha solo i numeri 2 e 5 tra i suoi divisori primi, allora il numero decimale che gli corrisponde è *finito*, e il numero razionale si dice anche numero razionale decimale (in quanto può essere scritto sotto forma di frazione con denominatore una potenza di dieci);

— se il denominatore non contiene né il 2 né il 5 tra i suoi divisori primi, allora il numero decimale che gli corrisponde è *periodico semplice*;

— se il denominatore contiene sia i numeri 2 e 5 tra i suoi divisori primi che altri divisori, allora il numero decimale che gli corrisponde è *periodico misto.*

1.6. *Frazione generatrice di un decimale periodico.*

Sia m il numero (eventualmente zero) di cifre dell'antiperiodo e p il numero di cifre del periodo. Detto x il numero dato, si esegua la sottrazione $10^{m+p}x - 10^m x$: la determinazione della frazione generatrice è immediata. Si veda l'esempio che segue.

Sia dato

$$x = 31.23\overline{567} .$$

Allora $m = 2$ e $p = 3$. Si ha poi:

$$100\,000x - 100x = 3\,123\,567.\overline{567} - 3123.\overline{567} = 3120444 ,$$

da cui si ottiene subito

$$x = \frac{3120444}{99900} .$$

1.7. *Razionalizzazioni.*

— $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$;

— $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \dfrac{a\left(\sqrt{b} \mp \sqrt{c}\right)}{b - c}$;

— $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \dfrac{a\left(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}\right)}{b \pm c}$.

1.8. *Radicali doppi.*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\,.$$

1.3 Calcolo combinatorio

1.9. *Disposizioni semplici.*

Disposizioni, o allineamenti, semplici di n oggetti di classe k, oppure a k a k sono i sottoinsiemi ordinati, costituiti da k elementi, presi da un insieme A di n elementi, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Detto in altro modo: dati n oggetti distinti e k caselle numerate, una disposizione semplice è una sistemazione di k degli n oggetti nelle caselle date in modo che due sistemazioni differiscano o per l'ordine o per gli oggetti che contengono. Il numero di queste disposizioni è dato da:

$$D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fattori}} \qquad k \leq n\,.$$

Le disposizioni semplici si possono anche vedere come funzioni *iniettive* da un insieme di k elementi (per esempio l'insieme $\{1, 2, \dots, k\}$) in un insieme A di n elementi. Si pone poi

$$D_{n,0} = 1\,.$$

1.10. *Disposizioni con ripetizione.*

Sono disposizioni in cui si consente che nelle k caselle gli n oggetti possano anche essere ripetuti più volte, ovvero funzioni, *anche non iniettive*, da un insieme di k elementi in un insieme di n elementi. k ora può essere anche più grande di n. Il numero di queste disposizioni è dato da:

$$D^r_{n,k} = n^k\,.$$

1.11. *Permutazioni semplici.*

Sono le disposizioni di n elementi, di classe n. Sono in numero di:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!\,.$$

Si tratta in sostanza degli anagrammi di parole con lettere tutte distinte. Si pone anche, per definizione,

$$0! = 1$$

1.12. *Permutazioni di elementi non tutti distinti.*

Si tratta degli allineamenti di n oggetti, non tutti distinti, ovvero degli anagrammi di parole con lettere non tutte distinte. Se si hanno n_1 oggetti uguali a un oggetto a_1, n_2 oggetti uguali a un oggetto a_2,…, n_k oggetti uguali a un oggetto a_k, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, il numero di questi allineamenti è:

$$P_n^{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}\,.$$

1.13. *Combinazioni semplici.*

Sono i sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi. Esse sono in numero di

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Questi numeri sono anche detti *coefficienti binomiali.*

1.14. *Formula del binomio (di Newton).*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n \\ &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{n-1}a^0b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\end{aligned}$$

1.15. *Proprietà dei coefficienti binomiali.*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

2 Polinomi

2.1 Generalità

Ci occupiamo in questo capitolo solo di polinomi a coefficienti reali e della ricerca delle loro radici in $\mathbb{R}$.

2.1. *Polinomi, o funzioni polinomiali, di grado n in una variabile.*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,, \qquad a_n \neq 0\,.$$

Spesso si scrive semplicemente $p(x)$ al posto di $p_n(x)$. Se n è il grado del polinomio p, si scrive $\deg(p) = n$. Casi particolari:

— $n = 0$, $p_0(x) = a_0$: funzioni costanti, aventi come grafico una retta parallela all'asse delle ascisse.

— $n = 1$, $p_1(x) = a_1x + a_0$: funzioni lineari, aventi come grafico una retta di coefficiente angolare a_1 e ordinata all'origine a_0. Abitualmente indicati con $p_1(x) = mx + q$, o $p_1(x) = ax + b$.

— $n = 2$, $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$: funzioni quadratiche, aventi come grafico una parabola ad asse verticale. Abitualmente indicati con $p_2(x) = ax^2 + bx + c$.

2.2. *Principio di identità dei polinomi.*

Due polinomi $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ coincidono per tutti i valori della variabile reale x se e solo se hanno lo stesso grado e

$$a_n = b_n\,, \quad a_{n-1} = b_{n-1}\,, \quad \ldots, a_1 = b_1\,, \quad a_0 = b_0\,.$$

In particolare: un polinomio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ è identicamente nullo se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli.

2.2 Divisione tra polinomi

2.3. *L'algoritmo della divisione tra polinomi.*

Se f e g sono due polinomi, con $\deg(f) \geq \deg(g)$ allora esistono due polinomi q ed r, con $\deg(q) = \deg(f) - \deg(g)$ e $\deg(r) < \deg(g)$, tali che:

$$f = g \cdot q + r\,.$$

q è detto *polinomio quoziente*, mentre r è detto *polinomio resto*. Se r è il polinomio identicamente nullo, si dice che f è *divisibile* per g.

Regola pratica per eseguire la divisione. Se si considerano i polinomi $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2$ e $g(x) = x^2 + x - 1$, per eseguire la divisione si dispongono i polinomi come nella ordinaria divisione tra numeri naturali (divisione "a danda"), si divide il primo termine del dividendo (x^5) per il primo del divisore (x^2) e si scrive il risultato (x^3) nello spazio destinato al quoziente. Successivamente si moltiplica il monomio ottenuto (x^3) per il divisore e si scrivono i risultati nello spazio apposito sotto al dividendo, cambiandoli di segno (solo per facilitare i calcoli). Si somma il dividendo con questo polinomio e si ricomincia, fin quando si ottiene un resto di grado minore a quello del divisore.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +2x^4 & +3x^3 & -x^2 & +x & +2 & x^2+x-1 \\
\cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & +x^3 & & & & x^3+x^2+3x-3 \\
\cline{1-6}
/ & x^4 & +4x^3 & -x^2 & +x & +2 & \\
 & -x^4 & -x^3 & +x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & / & 3x^3 & & +x & +2 & \\
 & & -3x^3 & -3x^2 & +3x & & \\
\cline{3-6}
 & & / & -3x^2 & +4x & +2 & \\
 & & & 3x^2 & +3x & -3 & \\
\cline{4-6}
 & & & / & 7x & -1 &
\end{array}
$$

2.4. *Divisione tra polinomi. Il caso particolare del dividendo del tipo $g(x) = x - \alpha$, con α costante reale qualunque.*

In questo caso il resto della divisione è semplicemente $f(\alpha)$, ovvero si ha:

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)\,.$$

Dunque

$f(x)$ è divisibile per $x - \alpha$ se e solo se $f(\alpha) = 0$.

2.3 Radici o zeri dei polinomi

2.5. *Radici o zeri di un polinomio.*

Dato un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ogni numero reale α tale che $p(\alpha) = 0$ si chiama una *radice* (reale) o *zero* (reale) del polinomio.

Una radice di un polinomio p è una *soluzione* dell'equazione $p(x) = 0$.

Un polinomio di grado n non può avere più di n radici (reali) distinte.

2.6. *Conseguenze del Teorema fondamentale dell'algebra (in $\mathbb{R}$).*

Ogni polinomio di grado n si può scomporre in un prodotto del tipo

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r}(x^2 + b_1x + c_1)^{h_1} \cdots (x^2 + b_sx + c_s)^{h_s}\,,$$

dove i termini di secondo grado hanno il discriminante negativo.

I numeri α_1, α_2, ..., α_r sono le radici (reali) del polinomio, mentre k_1, k_2, ..., k_r sono le loro *molteplicità*.

N.B. Anche se la scomposizione di un polinomio in un prodotto è *teoricamente* possibile, non è affatto detto che sia *tecnicamente* realizzabile.

2.7. *Determinazione delle radici dei polinomi, ovvero risoluzione di equazioni algebriche.*

— Polinomi di primo grado. Il polinomio $p(x) = ax+b$ ha come unica radice il numero reale $-{}^{b}\!/_{a}$.

— Polinomi di secondo grado. Il polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$
  - non ha radici reali se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;
  - ha due radici reali (eventualmente coincidenti) se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

  Pertanto un polinomio di secondo grado, con $\Delta \geq 0$, è scomponibile secondo la seguente formula:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

— Polinomi di grado superiore. Esistono formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado, ma esulano dagli scopi di questo testo, mentre non esistono formule risolutive generali per le equazioni di grado superiore (Teorema di Abel). La determinazione di eventuali radici per polinomi di questo tipo si basa sulla loro scomposizione in fattori e sulla ricerca di eventuali radici razionali.

2.8. *Relazioni tra radici e coefficienti in un polinomio di secondo grado.*

Se $p(x) = ax^2 + bx + c$, e $\Delta \geq 0$, allora

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

2.9. *Equazioni biquadratiche e trinomie.*

Le equazioni del tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = 0\,, \qquad \text{oppure} \qquad ax^{2n} + bx^n + c = 0\,,$$

si risolvono con la posizione $x^2 = t$, oppure $x^n = t$.

2.10. *Permanenze e variazioni.*

In un polinomio

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,, \qquad a_n \neq 0\,,$$

si ha una *variazione* di segno se due coefficienti consecutivi non nulli hanno segno diverso, una *permanenza* di segno se due coefficienti consecutivi non nulli hanno lo stesso segno.

2.11. *Regola dei segni di Cartesio.*

In un polinomio

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,, \qquad a_n \neq 0\,,$$

sia V il numero delle variazioni. Allora il numero V_p delle radici (reali) positive è minore o uguale a V; se V_p è minore di V, allora il numero $V - V_p$ è pari. Applicazione al caso dei polinomi di secondo grado. Se $ax^2 + bx + c$ è un polinomio di secondo grado con coefficienti tutti diversi da zero e discriminante non negativo, allora

— ad ogni variazione corrisponde una radice positiva,
— ad ogni permanenza una radice negativa.

2.12. *Ricerca di eventuali zeri razionali di un polinomio.*

Dato il polinomio

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,, \qquad a_n \neq 0\,,$$

le sue eventuali radici razionali appartengono all'insieme delle frazioni che hanno a numeratore un divisore del termine noto (a_0) e a denominatore un divisore del primo coefficiente (a_n). Se nessuna di queste frazioni è radice del polinomio, allora o non ci sono radici reali, oppure le eventuali radici reali sono irrazionali.

2.4 Prodotti notevoli. Scomposizione in fattori

2.13. *Triangolo di Tartaglia o di Pascal.*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

2.14. *Prodotti notevoli.*

— $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
— $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
— $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
— $(a+b)^n = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + \alpha_1 ab^{n-1} + \alpha_0 b^n$, con i coefficienti α_i determinati con il triangolo di Tartaglia.
— $(a-b)^n$: la stessa formula già vista per $(a+b)^n$, ma con i segni alternati, a partire dal +.
— $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

2.15. *Scomposizioni in fattori di alcuni polinomi.*

— $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
— $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.
— $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
— $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
— $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
— $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

— $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, solo con n dispari.
— $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, solo con n pari.
— $a^n - b^n = (a^2 - b^2)(a^{n-2} + a^{n-4}b^2 + \cdots + a^2b^{n-4} + b^{n-2})$, solo con n pari.
— Raccoglimenti parziali. Procedere come nel seguente esempio:

$$ax + ay - bx - by = a(x+y) - b(x+y) = (a-b)(x+y).$$

3 Geometria analitica nel piano

In quanto segue il sistema di coordinate cartesiane adottato è *ortogonale* e *monometrico.*

3.1 Nozioni fondamentali

3.1. *Distanza di due punti* $A(x_A, y_A)$ *e* $B(x_B, y_B)$ *.*

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,,$$

in particolare

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= |y_B - y_A| \quad \text{se} \quad x_A = x_B\,, \\ \overline{AB} &= |x_B - x_A| \quad \text{se} \quad y_A = y_B\,. \end{aligned}$$

Nelle formule soprascritte l'ordine dei punti A e B non è importante. La formula per la distanza non è altro che una semplice conseguenza del teorema di Pitagora, e per questo è importante che il sistema cartesiano sia ortogonale. I casi particolari si riferiscono a coppie di punti che appartengono, rispettivamente, a una retta parallela all'asse delle y ("retta verticale", $x_A = x_B$) oppure parallela all'asse delle x ("retta orizzontale", $y_A = y_B$).

3.2. *Punto medio* M *di un segmento* AB *.*

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}\,, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\,.$$

Si può notare che il punto medio di un segmento ha per coordinate la media delle coordinate degli estremi.

3.3. *Baricentro* G *di un triangolo* $\triangle ABC$*.*

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_G}{3}\,.$$

Anche per il baricentro si può notare che le sue coordinate sono la media delle coordinate dei vertici. Per le applicazioni alla fisica si deve tenere conto che queste formule forniscono le coordinate del baricentro solo se i tre vertici hanno la stessa massa.

3.4. *Divisione di un segmento in parti di rapporto assegnato.*

Dato un segmento AB, si vuole determinare un punto P, compreso tra A e B, tale che il rapporto $^{AP}/_{PB}$ sia uguale ad un numero reale λ (positivo) prefissato.

$$x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \qquad y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Notiamo che se $\lambda = 1$ si ottengono le coordinate del punto medio, se $\lambda = 0$ si ottengono le coordinate di A, mentre se $\lambda \to +\infty$ si ottengono le coordinate di B.

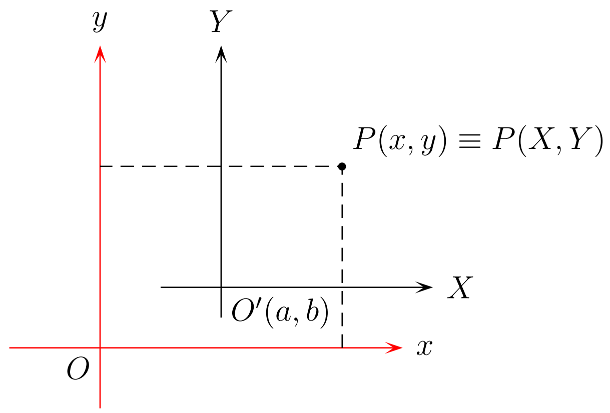
3.5. *Traslazione degli assi.*

Dati due sistemi cartesiani ortogonali monometrici Oxy e $O'XY$, con la stessa unità di misura, se $O'(a, b)$ è l'origine del "nuovo" sistema, le coordinate di uno stesso punto P visto dai due sistemi sono legate dalle formule:

$$(*) \quad \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}, \qquad (**) \quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Le formule $(*)$ forniscono le "vecchie" coordinate in funzione delle "nuove" e servono per trasformare le equazioni dei luoghi geometrici nel piano, le $(**)$ forniscono le "nuove" coordinate in funzione delle "vecchie" e servono per trasformare le coordinate dei punti. Questo significa che se un luogo è rappresentato da un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$, usando le $(*)$ si ottiene l'equazione $g(X, Y) = 0$, che rappresenta lo stesso luogo nel nuovo sistema; se un punto P ha coordinate (x, y), usando le $(**)$ si ottengono le coordinate dello stesso punto nel nuovo sistema.

Si veda la figura seguente:



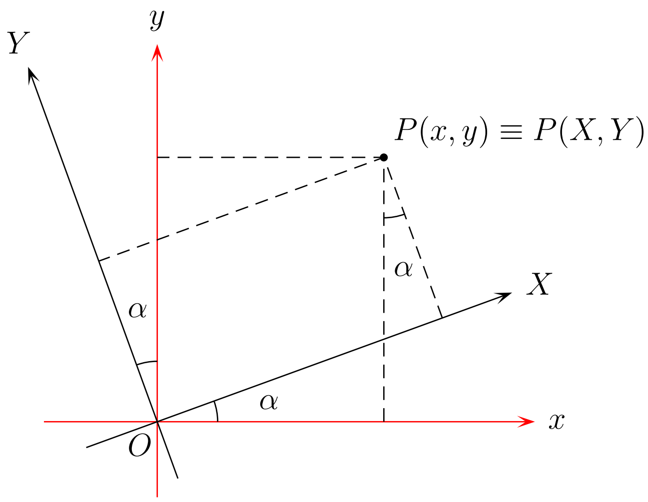
3.6. *Rotazione degli assi*

Dati due sistemi cartesiani ortogonali monometrici Oxy e OXY, con la stessa unità di misura e la stessa origine, se α è l'angolo individuato dai due semiassi positivi Ox e OX, le coordinate di uno stesso punto P visto dai due sistemi sono legate dalle formule:

$$(*) \quad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}, \qquad (**) \quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Per l'uso delle formule $(*)$ e $(**)$ valgono le stesse considerazioni fatte a proposito della traslazione degli assi.

Si veda la figura seguente:



3.7. *Rototraslazione degli assi.*

Le formule per la rototraslazione sono la combinazione di quelle per la traslazione e di quelle per la rotazione.

$$(*) \begin{cases} x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}, \qquad (**) \begin{cases} X = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ Y = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

3.8. *Coordinate polari e coordinate cartesiane associate.*

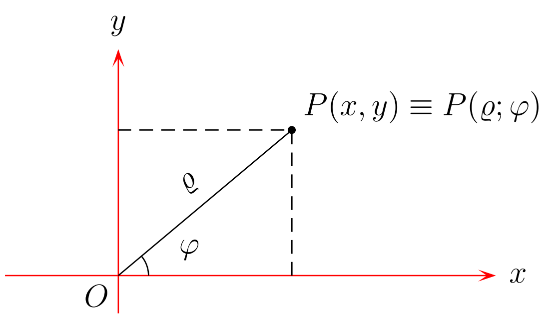
Se si considera il sistema di coordinate polari "naturalmente" associato ad un sistema cartesiano ortogonale monometrico, le coordinate cartesiane $P(x, y)$ e quelle polari $P(\varrho; \varphi)$ di uno stesso punto P sono legate dalle formule:

$$(*) \begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \end{cases}, \qquad (**) \begin{cases} \varrho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = x/\varrho\,,\ \sin\varphi = y/\varrho \end{cases}$$

Si noti che, per ottenere l'angolo φ a partire dalla coppia (x, y), si deve determinare preventivamente il quadrante in cui il punto P si trova e, successivamente, si possono usare le funzioni arcsin o arccos.

La notazione usata qui non è universale: molti preferiscono $[\varrho, \varphi]$ al posto di $(\varrho; \varphi)$: ci pare che la scelta di usare le parentesi quadre possa ingenerare confusione, in quanto è la stessa notazione usata per gli intervalli di numeri reali.

Si veda la figura seguente:



3.2 Coordinate cartesiane e grafici

L'introduzione nel piano di un sistema di coordinate cartesiane consente di rappresentare graficamente insiemi di coppie di numeri reali. Le situazioni di maggior interesse riguardano le rappresentazioni grafiche di:

— insiemi di coppie di soluzioni di equazioni in due incognite reali x e y: $f(x, y) = 0$;

— insiemi di coppie di numeri reali ottenuti mediante due equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},$$

ove f e g sono due funzioni reali di variabile reale;

— insiemi di coppie $(x, f(x))$, dove f è una funzione reale di variabile reale.

Nei casi di cui intendiamo occuparci, gli insiemi citati sono costituiti da *curve* più o meno regolari, come rette, coniche, grafici di funzioni elementari. Si deve notare che gli insiemi del terzo tipo (grafici di funzioni) soddisfano il cosiddetto *criterio della retta verticale*: una retta parallela all'asse delle ordinate interseca il grafico in al più un punto. Nelle applicazioni alla fisica interessa in modo particolare il secondo dei tre casi citati: in questo caso t rappresenta di solito il tempo e la curva descritta nel piano al variare di t si chiama anche *traiettoria*.

Non è escluso che uno stesso insieme di coppie possa essere rappresentato indifferentemente in uno dei tre modi sopra indicati. Per esempio l'equazione

$$x + 2y - 3 = 0$$

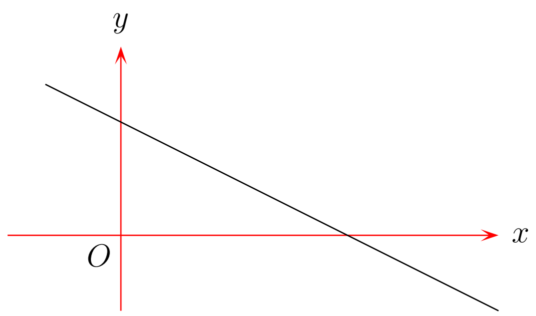
ha la stessa rappresentazione grafica delle funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{3}{2},$$

o della coppia di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = t \end{cases};$$

si tratta sempre della retta di seguito rappresentata:



Interessano poi anche rappresentazioni grafiche di insiemi di soluzioni di disequazioni in due incognite: questi insiemi si possono in genere agevolmente rappresentare come conseguenza dei tipi di grafici sopra considerati.

In generale le applicazioni richiedono la risoluzione dei seguenti due problemi, tra di loro complementari:

— la rappresentazione grafica di un insieme data l'equazione (o le equazioni);

— la determinazione della, o delle, equazioni, dato l'insieme, in generale come luogo geometrico e mediante altre proprietà.

3.3 La retta nel piano cartesiano

La retta nel piano cartesiano è rappresentata

— dalle soluzioni di un'equazione di primo grado in due incognite: $ax + by + c = 0$, detta *forma implicita* dell'equazione di una retta;

— dal grafico di una funzione lineare di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $x \mapsto mx + q$, spesso scritta, in maniera impropria, come $y = mx + q$, e detta *forma esplicita* dell'equazione di una retta;

— da una coppia di equazioni parametriche di primo grado nel parametro t:

$$\begin{cases} x &= lt + p \\ y &= mt + q \end{cases} .$$

Molte delle formule che seguono si possono memorizzare ed applicare facilmente se si conosce la teoria dei vettori, nel piano o nello spazio, e si tiene conto dei seguenti fatti:

— data la retta in forma implicita, $ax + by + c = 0$, il vettore $\mathbf{v} = (a, b)$ è perpendicolare alla retta;

— data la retta come coppia di equazioni parametriche, il vettore $\mathbf{w} = (l, m)$ è parallelo alla retta.

Nel seguito, comunque, non useremo queste proprietà.

3.3.1 La retta come equazione di primo grado in due incognite: forma implicita

3.9. *Equazione generale:*

$$ax + by + c = 0 ,$$

con la condizione che $a^2 + b^2 \neq 0$, *ovvero che* a *e* b *non siano contemporaneamente nulli.*

Si noti che, poiché a e b non sono contemporaneamente nulli, l'equazione contiene effettivamente solo *due* parametri indipendenti, cioè bastano *due condizioni* per trovare l'equazione di una retta. L'equazione si può infatti scrivere in almeno uno dei due modi seguenti:

$$x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \text{ (se } a \neq 0) , \quad \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0 \text{ (se } b \neq 0) .$$

Se a e b sono *entrambi* diversi da zero si può scrivere l'equazione nella cosiddetta *forma segmentaria*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 ,$$

interessante perché p e q rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della retta con gli assi x ed y rispettivamente.

3.10. *Condizione di parallelismo di due rette,* $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *e* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 .$$

3.11. *Condizione di perpendicolarità di due rette,* $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *e* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$*:*

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 .$$

3.12. *Distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$:*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

3.13. *Retta passante per due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:*

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)\,.$$

3.3.2 La retta come funzione lineare di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: forma esplicita

3.14. *Formula generale:*

$$x \mapsto mx + q\,, \textit{scritta anche, seppure in modo improprio, } y = mx + q$$

In questo caso la retta in questione non può essere parallela all'asse delle ordinate, cioè non è verticale.

Il numero m si chiama *coefficiente angolare*, mentre q è l'*ordinata all'origine*.

3.15. *Coefficiente angolare di una retta non verticale.*

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha\,,$$

dove A e B sono due punti qualunque sulla retta e α è l'angolo, nel semipiano delle y positive, tra la direzione positiva dell'asse x e la retta stessa.

3.16. *Condizione di parallelismo di due rette non verticali, $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$:*

$$m_1 = m_2\,.$$

3.17. *Condizione di perpendicolarità di due rette non verticali né orizzontali, $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$:*

$$m_1 \cdot m_2 = -1\,.$$

3.18. *Il minore dei due angoli formati da due rette non perpendicolari, né verticali, $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|\,.$$

3.19. *Retta non verticale passante per un punto $A(x_A, y_A)$ e di coefficiente angolare m:*

$$y - y_A = m(x - x_A)\,.$$

3.4 Le coniche nel piano cartesiano

Le coniche nel piano cartesiano sono rappresentate da un'equazione di secondo grado in due incognite:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\,.$$

La condizione indicata significa che i tre coefficienti a, b, c non possono essere contemporaneamente nulli (altrimenti l'equazione si ridurrebbe ad una di primo grado).

In alcuni casi le coniche si possono anche rappresentare come grafici di funzioni reali di variabile reale (per esempio la parabola con asse verticale). È inoltre generalmente possibile scriverle mediante una coppia di equazioni parametriche, ma questo esula dagli scopi di questa breve trattazione.

Si noti che, non potendo essere a, b, c contemporaneamente nulli, l'equazione contiene cinque parametri effettivi (basta ripetere il discorso fatto nel caso dell'equazione di primo grado) e dunque occorrono, in generale, *cinque condizioni* per determinare l'equazione di una conica. Un minor numero di condizioni è richiesto nei casi particolari che tratteremo più avanti.

Le coniche non degeneri sono solo l'ellisse (e la circonferenza in particolare), l'iperbole, la parabola; le coniche degeneri sono l'insieme vuoto, un punto, una coppia di rette (incidenti o parallele, eventualmente coincidenti). La parabola ha un solo asse di simmetria, l'ellisse e l'iperbole ne hanno due. Se l'equazione è priva del termine misto, gli assi di simmetria sono paralleli agli assi coordinati.

Uno dei problemi più comuni nella teoria delle coniche è quello della determinazione delle rette tangenti condotte da un punto $P(x_0, y_0)$ del piano. Il procedimento classico da seguire è quello del "Delta =0", che si può schematizzare così:

— si esamina separatamente la possibilità che una retta verticale ($x = k$) possa essere tangente alla conica;
— si considera il sistema di secondo grado tra l'equazione della conica e quella di una generica retta non verticale passante per P

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} ;$$

— si ricava la y dall'equazione della retta e la si sostituisce nell'equazione della conica, ottenendo un'equazione di secondo grado nella sola incognita x;
— si uguaglia a zero il discriminante di questa equazione, ottenendo un'equazione nell'incognita m, le cui soluzioni danno il coefficiente angolare della (o delle due) rette tangenti.

Nel caso in cui il punto P appartenga alla conica si possono seguire anche altre strategie, che saranno indicate in seguito.

Per quanto riguarda il numero delle tangenti valgono le stesse proprietà della circonferenza:

— per un punto della conica si può condurre una sola tangente alla conica stessa;
— per un punto esterno si possono condurre due tangenti;
— per un punto interno non si può condurre alcuna tangente.

3.5 La parabola con asse verticale o orizzontale

3.5.1 Asse verticale

In questo caso la parabola è anche grafico della funzione reale di variabile reale $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

3.20. *Equazione generale:*

$$y = ax^2 + bx + c \,.$$

3.21. *Equazione dell'asse:*

$$x = -\frac{b}{2a}\,.$$

3.22. *Coordinate del vertice:*

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)\,.$$

Con Δ si indica, come è tradizione, il valore di b^2-4ac. Si noti che, essendo il vertice un punto della parabola, una volta nota l'ascissa se ne può trovare l'ordinata per semplice sostituzione.

3.23. *Coordinate del fuoco:*

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)\,.$$

3.24. *Equazione della direttrice:*

$$y = \frac{-1-\Delta}{4a}\,.$$

3.25. *Coefficiente angolare della tangente in un punto $P(x_o, y_o)$ appartenente alla parabola:*

$$m = 2ax_0 + b\,.$$

3.5.2 Asse orizzontale

Le formule relative a questo caso si ottengono semplicemente scambiando la x con la y nelle precedenti.

3.26. *Equazione generale:*

$$x = ay^2 + by + c\,.$$

3.27. *Equazione dell'asse:*

$$y = -\frac{b}{2a}\,.$$

3.28. *Coordinate del vertice:*

$$V = \left(\frac{-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)\,.$$

Con Δ si indica, come prima, il valore di $b^2 - 4ac$. Si noti che, essendo il vertice un punto della parabola, una volta nota l'ordinata se ne può trovare l'ascissa per semplice sostituzione.

3.29. *Coordinate del fuoco:*

$$F = \left(\frac{1-\Delta}{4a}, \frac{b}{2a},\right)\,.$$

3.30. *Equazione della direttrice:*

$$x = \frac{-1-\Delta}{4a}\,.$$

3.6 La circonferenza

3.31. *Equazione generale, in forma canonica:*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\,.$$

Si noti che l'equazione può anche essere data nella forma $mx^2 + my^2 + nx + py + q = 0$: prima di procedere conviene ridurla alla forma canonica precedente, dividendo ambo i membri per m.

3.32. *Coordinate del centro:*

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

3.33. *Raggio r:*

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\,.$$

Se il radicando dell'espressione precedente è negativo l'equazione non ha soluzioni reali; se è nullo si tratta di una circonferenza degenere ridotta a un solo punto.

3.34. *Tangente ad una circonferenza per un punto $P(x_0, y_0)$* appartenente *alla circonferenza:*

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0\,.$$

3.35. *Circonferenza di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r:*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\,.$$

3.36. *Il "completamento dei quadrati".*

Per rappresentare una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, senza usare formule particolari, si può ricorrere alla tecnica del completamento dei quadrati, utile in molte circostanze.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = \\ &= \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c \end{aligned}$$

Quindi

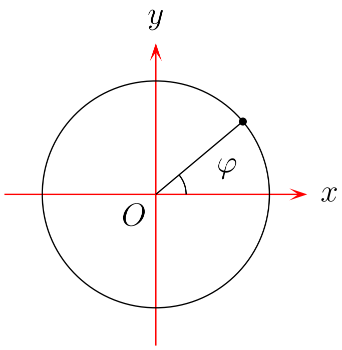
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\,.$$

Se il secondo membro dell'ultima equazione è minore di zero, non ci sono soluzioni reali, altrimenti si è riscritta l'equazione data in modo da rendere evidente che si tratta di una circonferenza con centro e raggio dati dalle formule sopra riportate.

3.37. *Equazioni parametriche della circonferenza:*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

In queste equazioni r è il raggio e φ è l'angolo indicato nella figura che segue: si tratta in sostanza di un passaggio da coordinate cartesiane a polari.



3.7 Ellisse e iperbole in forma canonica

Le equazioni dell'ellisse e dell'iperbole assumono una forma particolarmente semplice nel caso di curve con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati.

3.38. *Equazione canonica di ellisse e iperbole:*

$$\pm\frac{(x-x_C)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1\,.$$

Si distinguono i seguenti casi, a seconda dei segni che compaiono a primo membro:

1. $-\,,\,-$: nessuna soluzione;
2. $+\,,\,+$: ellisse;
3. $+\,,\,-$: iperbole con l'asse principale orizzontale;
4. $-\,,\,+$: iperbole con l'asse principale verticale.

I numeri a e b misurano i semiassi, rispettivamente quello orizzontale e quello verticale, $C(x_C, y_C)$ è il centro.

3.39. *Formula per la semidistanza focale c:*

$$\textit{Ellisse: } c^2 = |a^2 - b^2| \qquad \textit{Iperbole: } c^2 = a^2 + b^2\,.$$

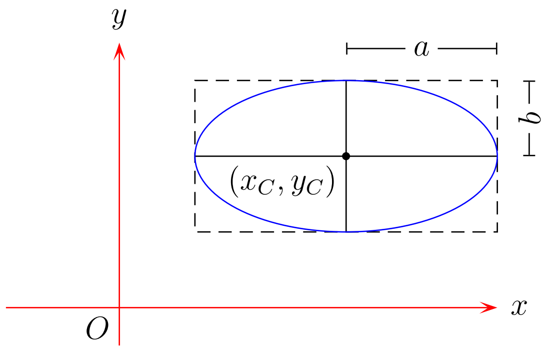
Nell'ellisse i fuochi stanno sempre sull'asse maggiore, nell'iperbole sull'asse principale.

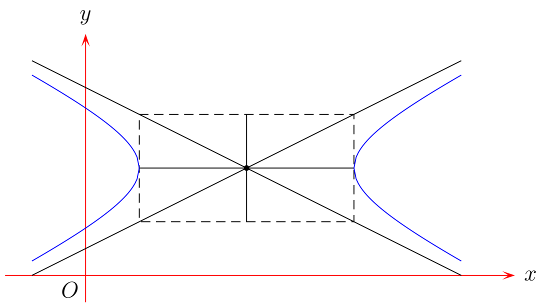
3.40. *Equazioni degli asintoti dell'iperbole:*

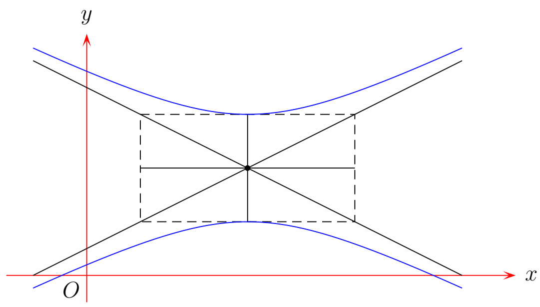
$$y - y_C = \pm\frac{b}{a}(x - x_C)\,.$$

3.41. *Regola pratica per tracciare l'ellisse o l'iperbole.*

Si costruisce un rettangolo che ha centro in $C(x_C, y_C)$, lati paralleli agli assi coordinati e lunghi, rispettivamente, $2a$ (quello orizzontale) e $2b$ (quello verticale). A questo punto l'ellisse si inscrive facilmente nel rettangolo. Per l'iperbole si tracciano anche le diagonali del rettangolo (che sono gli asintoti dell'iperbole stessa), dopodiché la curva si traccia facilmente, tenendo conto delle due possibilità sopra indicate. Si vedano le figure sotto riportate che si riferiscono, nell'ordine, al'ellisse, all'iperbole con asse principale orizzontale e all'iperbole con asse principale verticale.







3.42. *Il "completamento dei quadrati".*

Anche per il caso dell'ellisse e dell'iperbole si può usare la tecnica del completamento dei quadrati, con limitate modifiche rispetto al caso della circonferenza, per tracciarne il grafico. Supponiamo dunque di avere l'equazione $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$, con a e c entrambi diversi da zero, e operiamo come di seguito indicato.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = (ax^2 + dx) + (cy^2 + ey) + f = \\
&= a\left(x^2 + \frac{d}{a}x\right) + c\left(y^2 + \frac{e}{c}y\right) + f = \\
&= a\left(x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{d^2}{4a^2}\right) + c\left(y^2 + \frac{e}{c}y + \frac{e^2}{4c^2}\right) - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{e^2}{4b^2} + f \\
&= a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{e^2}{4b^2} + f\,.
\end{aligned}
$$

Ne segue che

$$
ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = \frac{d^2}{4a^2} + \frac{e^2}{4b^2} - f\,.
$$

Se il secondo membro dell'ultima equazione vale zero, si ha una conica degenere (un punto o due rette incidenti), se il secondo membro è diverso da zero ci si riduce agevolmente, dividendo per il secondo membro, ad una delle situazioni di equazioni canoniche sopra considerate.

3.43. *Eccentricità, 'e', dell'ellisse e dell'iperbole.*

$$\textit{Ellisse: } e = \frac{c}{\textit{semiasse maggiore}}\,, \quad \textit{Iperbole: } e = \frac{c}{\textit{semiasse principale}}$$

3.44. *Equazioni parametriche dell'ellisse:*

$$\begin{cases} x &= a\cos\varphi \\ y &= b\sin\varphi \end{cases}$$

3.8 L'iperbole equilatera e la funzione omografica

Se $a = b$ l'iperbole

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2} - \frac{(y-y_C)^2}{a^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad -\frac{(x-x_C)^2}{a^2} + \frac{(y-y_C)^2}{a^2} = 1$$

si dice *equilatera.*
In questo caso gli asintoti sono tra di loro perpendicolari ed è conveniente assumerli come assi coordinati, eseguendo una rototraslazione degli assi. In questo caso si ottiene la

3.45. *Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti:*

$$xy = \pm\frac{a^2}{2} = k\,,$$

equazione molto importante nelle applicazioni perché rappresenta la legge della *proporzionalità inversa.*

Se invece si esegue solo una rotazione degli assi coordinati in modo da renderli paralleli agli asintoti, si ottiene una funzione del tipo

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}\,,$$

con $c \neq 0$ e numeratore non divisibile per il denominatore. Si tratta del caso più importante della cosiddetta

3.46. *Funzione omografica:*

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}\,, \ \textit{scritta anche nella forma, impropria, } y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Quest'ultima rappresenta

— una retta se $c = 0$: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$;

— una retta privata del punto $-{}^{d}\!/_{c}$ se $ad - bc = 0$, $c \neq 0$, ovvero se $b = {}^{ad}\!/_{c}$:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax + {}^{ad}\!/_{c}}{cx+d} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c}$$

— un'iperbole equilatera di asintoti $y = {}^{a}\!/_{c}$ e $x = -{}^{d}\!/_{c}$, negli altri casi.

3.9 Trasformazioni lineari

3.47. *Affinità*

Una affinità è una trasformazione lineare che ad ogni punto $P(x, y)$ del piano fa corrispondere un altro punto $P'(x', y')$ le cui coordinate sono date da

$$\begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{cases},$$

con la condizione

$$\Delta = ad - bc \neq 0\,.$$

Il numero $r_a = |\Delta|$ è detto *rapporto di affinità*; se $\Delta > 0$ l'affinità si dice diretta o positiva, se se $\Delta < 0$ l'affinità si dice inversa o negativa.

— L'affinità trasforma rette in rette, rette parallele in rette parallele, rette incidenti in rette incidenti
— In un'affinità il rapporto tra le aree di regioni corrispondenti è costante ed uguale al rapporto di affinità.
— I punti P che coincidono con i loro trasformati si chiamano *punti uniti* o *invarianti.*
— Le rette i cui punti hanno immagine appartenente alla retta stessa si chiamano *rette unite* o *invarianti.* Le rette unite possono essere *puntualmente unite* se formate da punti uniti, *globalmente unite* se i loro punti, pur non essendo uniti hanno immagini appartenenti alla stessa retta.

3.48. *Una affinità particolare.*

L'affinità del tipo

$$\begin{cases} x' &= ax \\ y' &= dy \end{cases},$$

ha l'origine come punto unito e gli assi cartesiani come rette unite. Alcuni testi chiamano queste affinità dilatazioni, ma la nomenclatura non è universale e di solito il termine dilatazione è riservato ad un caso successivo.

3.49. *Similitudini.*

Si chiamano similitudini le affinità del tipo

$$\begin{cases} x' &= ax - by + p \\ y' &= bx + ay + q \end{cases}, \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q \end{cases}.$$

Nel primo caso si ha una similitudine diretta, nel secondo caso una similitudine inversa. La radice quadrata del rapporto di affinità si chiama *rapporto di similitudine*, k:

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

— Una similitudine trasforma circonferenze in circonferenze (proprietà caratteristica delle similitudini).
— Il rapporto di segmenti corrispondenti è costante ed uguale al rapporto di similitudine.

— Angoli corrispondenti sono isometrici (“uguali”). Di conseguenza in una similitudine a rette perpendicolari corrispondono rette perpendicolari.

Si può osservare che, posto

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{k} = \cos\alpha \quad \text{e} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{k} = \sin\alpha\,,$$

le similitudini si possono scrivere nella forma

$$\begin{cases} x' &= kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p \\ y' &= kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q \end{cases}, \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x' &= kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p \\ y' &= kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q \end{cases}.$$

3.50. *Omotetie.*

Sono le similitudini del tipo

$$\begin{cases} x' &= ax + p \\ y' &= ay + q \end{cases}, \quad a^2 \neq 1\,.$$

Il punto

$$C\left(\frac{p}{1-a}, \frac{q}{1-a}\right),$$

è l’unico punto unito ed è detto centro dell’omotetia. Tutte le rette per C sono rette unite.

Il numero a è detto rapporto di omotetia; se $a > 0$ due punti corrispondenti stanno sulla stessa semiretta di origine C, se $a < 0$ stanno su semirette opposte, sempre con origine in C.

Se $|a| > 1$ l’omotetia è un *ingrandimento*, se $|a| < 1$ è una *riduzione*.

Una trasformazione del tipo considerato, ma con $a^2 = 1$, è una particolare isometria.

3.51. *Isometrie.*

Sono le similitudini piane di rapporto $k = 1$, e si distinguono in dirette (dette anche *rototraslazioni*) o inverse (tra cui le *simmetrie*), esattamente come le similitudini.

Le isometrie dirette sono dunque del tipo:

$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}.$$

Tra esse si distinguono le seguenti.

— Identità ($\alpha = p = q = 0$):

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases}.$$

— Traslazioni ($\alpha = 0$):

$$\begin{cases} x' &= x + p \\ y' &= y + q \end{cases}.$$

— Rotazioni ($p = q = 0$):

$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$

— Simmetrie di centro $C(x_c, y_c)$ ($\alpha = \pi$, $p = 2x_c$, $q = 2y_C$):

$$\begin{cases} x' &= -x + 2x_C \\ y' &= -y + 2y_C \end{cases} .$$

Le similitudini inverse sono del tipo:

$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + q \end{cases} .$$

Tra esse si distinguono le seguenti.

— Simmetria rispetto all'asse x ($\alpha = p = q = 0$):

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} .$$

— Simmetria rispetto alla retta $y = y_0$ ($\alpha = p = 0$, $q = 2y_0$):

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases} .$$

— Simmetria rispetto all'asse y ($\alpha = \pi$, $p = q = 0$):

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} .$$

— Simmetria rispetto alla retta $x = x_0$ ($\alpha = \pi$, $p = 2x_0$, $q = 0$):

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = y \end{cases} .$$

— Simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ ($\alpha = \pi/2$, $p = q = 0$):

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} .$$

— Simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$ ($\alpha = -\pi/2$, $p = q = 0$):

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} .$$

3.52. *Ricerca degli eventuali punti uniti.*

Nel sistema

$$\begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{cases} ,$$

sostituire x' con x e y' con y, ottenendo:

$$\begin{cases} x &= ax + by + p \\ y &= cx + dy + q \end{cases} .$$

Le soluzioni di questo sistema di primo grado sono gli eventuali punti uniti, e si possono presentare le seguenti situazioni:

— nessuna soluzione, cioè nessun punto unito;
— una sola soluzione, cioè un solo punto unito;
— infinite soluzioni, che stanno sempre su una retta, unita, tutta costituita da punti uniti.

3.53. *Ricerca delle eventuali rette unite.*

Data l'affinità

$$\begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{cases},$$

trovarne l'inversa (cioè ricavare x e y in funzione di x' e y':

$$\begin{cases} x &= \alpha x' + \beta y' + r \\ y &= \gamma x' + \delta y' + s \end{cases}.$$

— Considerare poi una generica retta, distinguendo due casi, retta verticale ($x = h$) e retta non verticale ($y = mx + n$).
— Sostituire nell'equazione della retta la x e la y con le espressioni date dal secondo sistema.
— Imporre le condizioni affinché la "nuova" retta sia identica alla prima, cioè con gli stessi coefficienti (si ottiene una equazione in h per il caso della retta verticale, due equazioni in m e n per l'altro caso). Se da queste condizioni si trovano soluzioni, esistono rette unite, altrimenti no.

4 Trigonometria piana

4.1 Misura degli angoli

4.1. *Grado sessagesimale è l'angolo uguale a* $1/360$ *dell'angolo giro.*

Se si usa questa unità, la misura degli angoli è indicata con $\alpha°$.

4.2. *Grado centesimale è l'angolo uguale a* $1/400$ *dell'angolo giro, ovvero* $1/100$ *dell'angolo retto.*

Se si usa questa unità, la misura degli angoli è indicata con $\alpha\,\mathrm{gra}$ o $\alpha\,\mathrm{grad}$.

4.3. *Radiante è l'angolo al centro corrispondente a un arco di circonferenza uguale al raggio.*

Misura in radianti di un angolo è il rapporto tra l'arco individuato dall'angolo su una qualunque circonferenza avente il centro nel vertice dell'angolo e il raggio della circonferenza. Questo significa che la misura degli angoli e degli archi di circonferenza è legata dalla semplice formula che segue.

4.4. *Angoli in radianti e archi di circonferenza:*

$$\text{arco} = \text{angolo} \cdot \text{raggio}\,.$$

Se si usa questa unità, la misura degli angoli è indicata con α^r, o semplicemente α, in quanto nella maggior parte delle questioni di interesse applicativo gli angoli devono essere misurati esclusivamente in radianti.

4.5. *Passaggio da un'unità ad un'altra.*

$$\alpha°\colon 360° = \alpha\,\mathrm{grad}\colon 400\,\mathrm{grad} = \alpha\colon 2\pi\,.$$

4.6. *Angoli orientati.*

Un angolo orientato è una delle due parti di piano delimitate da una *coppia* di semirette aventi l'origine in comune: si intende cioè che i due *lati* dell'angolo vengano considerati in un ben determinato ordine.

Se nel piano è fissato un verso di rotazione, si diranno *positivi* gli angoli orientati nello stesso verso, *negativi* gli altri. Anche alla misura degli angoli viene allora attribuito un segno. Se nel piano è fissato un sistema di coordinate cartesiane, si sceglie normalmente come verso prefissato quello che porta il semiasse positivo delle ascisse su quello delle ordinate compiendo l'angolo di 90°: esso è, di solito, quello "antiorario" (espressione non molto chiara per la verità, ma di uso comune. . .).

La misura degli angoli in radianti porta naturalmente ad identificare gli angoli stessi con archi di circonferenza di raggio unitario, tant'è che spesso si usa il termine *arco* al posto di *angolo*.

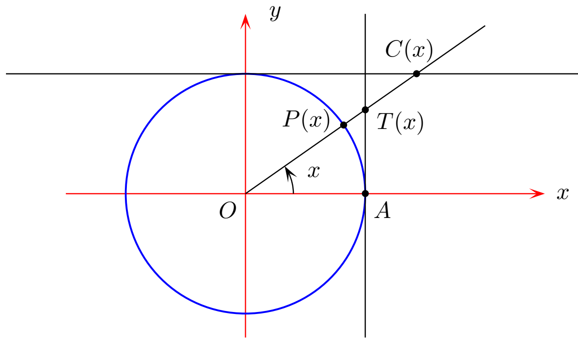
Riassumendo, il procedimento che si usa abitualmente per trattare gli angoli e la loro misura è quello di seguito descritto.

— Nel piano in cui si sia introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometrico, si considera la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1, detta *circonferenza goniometrica*.
— Considerato poi un angolo generico, lo si può pensare con vertice nell'origine O del sistema cartesiano e con il *primo lato* coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.
— Si immagina che il secondo lato dell'angolo ruoti attorno al vertice "spazzando" l'intero angolo a partire dal primo lato.
— Un punto P sul *secondo lato* dell'angolo, a distanza 1 dal vertice, nella rotazione decsrive un arco di circonferenza la cui lunghezza è proprio la misura in radianti dell'angolo stesso, presa col segno più se la rotazione avviene in senso antiorario, col segno meno se in senso orario.
— A questo punto è facile immaginare che il secondo lato dell'angolo, nella rotazione attorno al vertice, possa continuare a ruotare anche dopo aver compiuto un intero giro, oppure muoversi in senso orario: la lunghezza, con segno, dell'arco descritto dal punto P si può chiamare "Angolo generalizzato", con misura espressa da un qualunque numero reale.

Sarà ora possibile identificare l'insieme degli angoli con l'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale x si può far corrispondere l'angolo generalizzato descritto come sopra indicato e quindi un ben determinato punto $P(x)$ sulla circonferenza goniometrica.

4.2 Le funzioni trigonometriche

Considerata la circonferenza goniometrica e il punto $P(x)$ corrispondente al numero reale x, consideriamo anche i punti $T(x)$ e $C(x)$ indicati nella figura di seguito:



4.7. *Seno di un angolo o di un numero reale x, $\sin x$, è:*

$$\text{l'ordinata del punto } P(x).$$

4.8. *Coseno di un angolo o di un numero reale x, $\cos x$, è:*

$$\text{l'ascissa del punto } P(x).$$

4.9. *Tangente di un angolo o di un numero reale* x, $\operatorname{tg} x$, *è:*

l'ordinata del punto $T(x)$, *che ha ascissa* 1.

Si ha anche
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

4.10. *Cotangente di un angolo o di un numero reale* x, $\operatorname{ctg} x$, *è:*

l'ascissa del punto $C(x)$, *che ha ordinata* 1.

Si ha anche
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

4.11. *Domini, periodicità.*

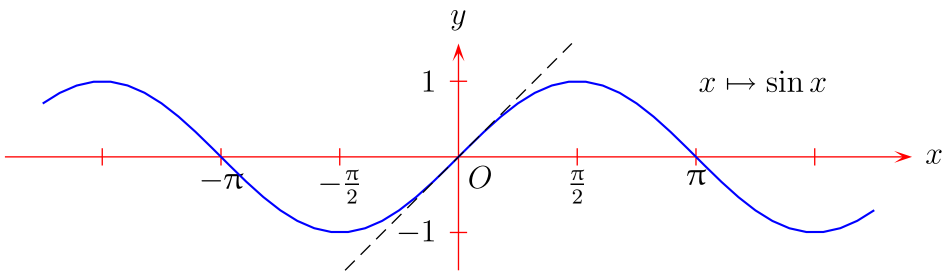
— Le funzioni sin e cos hanno dominio $\mathbb{R}$ e minimo periodo 2π.
— La funzione tg ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e minimo periodo π.
— La funzione ctg ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e minimo periodo π.

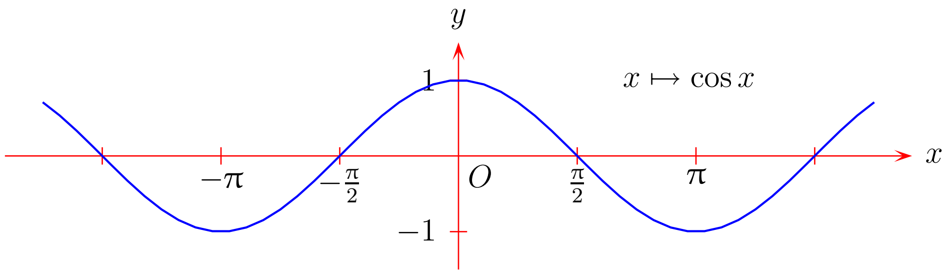
4.12. *Secante,* sec, *e cosecante,* cosec.

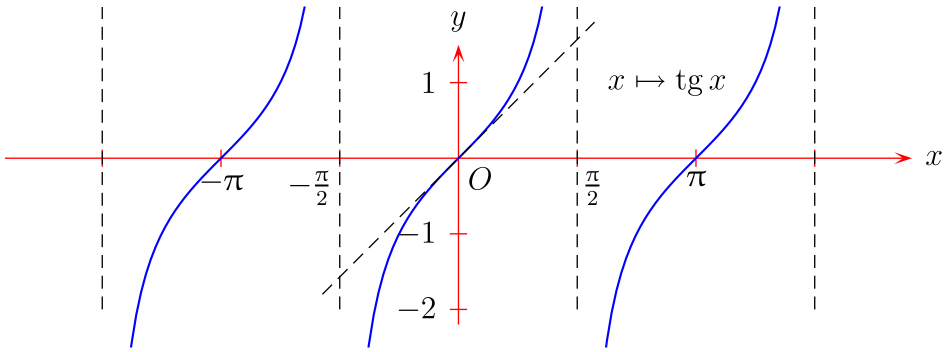
$$\sec x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos x}\,, \qquad \operatorname{cosec} x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin x}\,.$$

4.13. *Grafici delle funzioni trigonometriche.*

Nei grafici che seguono la misura degli angoli è sempre in radianti. Si deve notare che *solo* misurando gli angoli in radianti ha senso usare sistemi cartesiani monometrici. Per quanto riguarda i grafici di sin e tg è molto importante il fatto che la bisettrice del primo e terzo quadrante, $y = x$, è tangente ai rispettivi grafici nell'origine, sempre solo se gli angoli sono misurati in radianti.







4.14. *Valori notevoli delle funzioni trigonometriche.*

La tabella che segue riporta i valori delle funzioni trigonometriche per alcuni angoli acuti notevoli. Considerazioni elementari sulla circonferenza goniometrica permettono di calcolare gli stessi valori per angoli maggiori di un angolo retto.

$x°$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
22° 30′	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$

continua nella pagina successiva

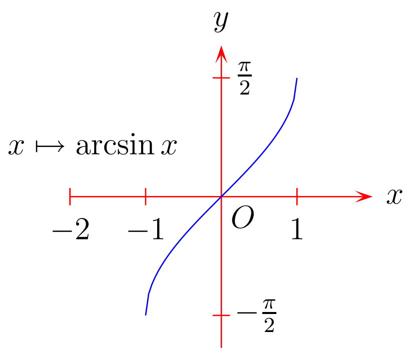
continua dalla pagina precedente

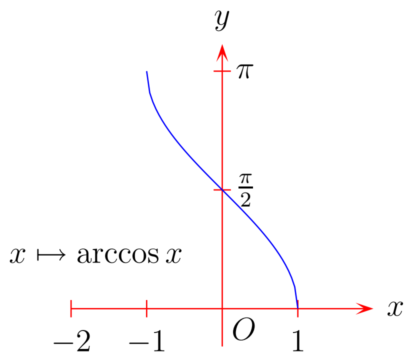
$x°$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$36°$	$\dfrac{\pi}{5}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$54°$	$\dfrac{3\pi}{10}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
$72°$	$\dfrac{2\pi}{5}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$75°$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$

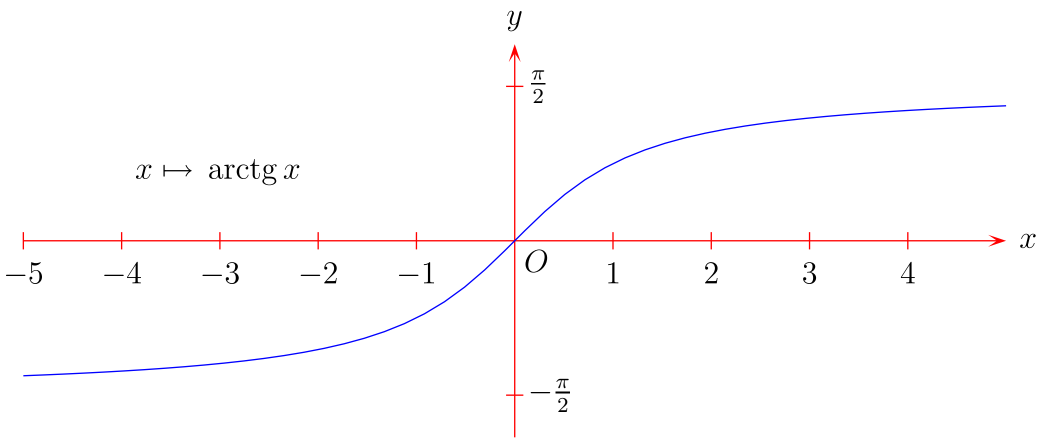
4.15. *Funzioni trigonometriche inverse.*

Le funzioni trigonometriche non sono né iniettive né suriettive: per poterle invertire è necessario operare opportune restrizioni, sia sul dominio che sul codominio. La restrizione sul codominio per le funzioni seno e coseno è, naturalmente, all'intervallo $[-1,1]$; per il dominio le convenzioni comunemente adottate sono:
— funzione *seno*, restrizione all'intervallo $[-\pi/2,\ \pi/2]$;
— funzione *coseno*, restrizione all'intervallo $[0,\ \pi]$;
— funzione *tangente*, restrizione all'intervallo $]-\pi/2,\ \pi/2[$.
Le funzioni inverse sono:
— $\arcsin\colon\ [-\pi/2,\ \pi/2] \to [-1,1]$;
— $\arccos\colon\ [0,\ \pi] \to [-1,1]$;
— $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to\ ]-\pi/2,\ \pi/2[$.

4.16. *Grafici delle funzioni trigonometriche inverse.*







4.3 Formule trigonometriche

4.17. *Relazione fondamentale (teorema di Pitagora).*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,.$$

4.18. *Formule di addizione e sottrazione.*

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,;\\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\,;\\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\,.\end{aligned}$$

L'ultima formula richiede che x, y, $x \pm y$ siano diversi da $\pi/2 + k\pi$.

4.19. *Formule di duplicazione.*

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x\,,\\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\,,\\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\,.\end{aligned}$$

L'ultima formula richiede che x e $2x$ siano diversi da $\pi/2 + k\pi$.

4.20. *Formule di bisezione.*

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,,$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}\,.$$

Le ultime formule richiedono che x sia diverso da $\pi + 2k\pi$.

4.21. *Formule di prostaferesi.*

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\,,\\
\sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\,,\\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\,,\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\,.
\end{aligned}$$

4.22. *Formule di Werner.*

$$\begin{aligned}
\sin x\sin y &= \frac{1}{2}\big[\cos(x-y)-\cos(x+y)\big]\,,\\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}\big[\cos(x-y)+\cos(x+y)\big]\,,\\
\sin x\cos y &= \frac{1}{2}\big[\sin(x-y)+\sin(x+y)\big]\,,
\end{aligned}$$

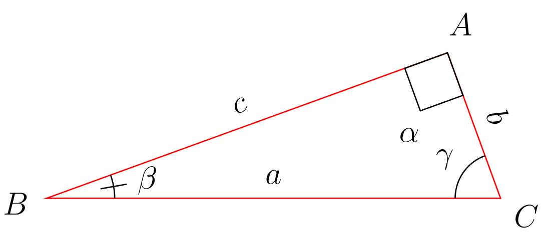
4.23. *Formule "parametriche".*

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} \qquad \sin 2x = \frac{2tgx}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} \qquad \cos 2x = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

Le formule scritte richiedono che x sia diverso da $\pi + 2k\pi$ o, rispettivamente, da $\pi/2 + k\pi$.

4.24. *Risoluzione dei triangoli rettangoli.*



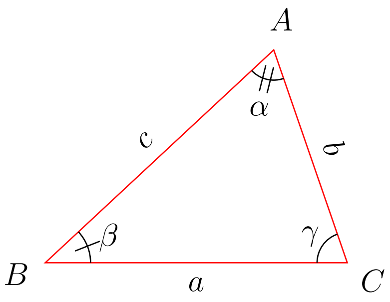
$$\begin{aligned}
&\text{cateto} = \text{ipotenusa} \times \sin(\text{angolo opposto})\,,\\
&\text{cateto} = \text{ipotenusa} \times \cos(\text{angolo acuto adiacente})\,,\\
&\text{cateto} = \text{altro cateto} \times \mathrm{tg}(\text{angolo acuto opposto al primo cateto})\,.
\end{aligned}$$

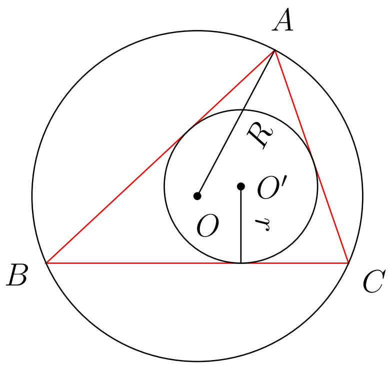
4.25. *Teorema della corda.*

In una circonferenza di raggio r, data una corda a e uno degli angoli α alla circonferenza (tra di loro supplementari) che insistono sulla corda, si ha

$$a = 2r\sin\alpha\,.$$

Convenzioni sui triangoli qualunque





4.26. *Teorema dei seni.*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,.$$

4.27. *Teorema del coseno, o di Carnot (teorema di Pitagora generalizzato).*

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\,,\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta\,,\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\,.\end{aligned}$$

4.28. *Area di un triangolo.*

$$\mathcal{S}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta\,.$$

$$\mathcal{S}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad(p\ \textit{è il semiperimetro, formula di Erone})\,.$$

4.29. *Raggio dei cerchi inscritto e circoscritto ad un triangolo.*

$$r=\frac{\mathcal{S}}{p}\,,\qquad R=\frac{abc}{4\mathcal{S}}\,.$$

4.30. *Raggi dei cerchi ex-inscritti ad un triangolo.*

$$r_a=\frac{\mathcal{S}}{p-a}\,;\qquad r_b=\frac{\mathcal{S}}{p-b}\,;\qquad r_c=\frac{\mathcal{S}}{p-c}\,;$$

ove r_a, r_b, r_c sono i raggi dei cerchi tangenti ai lati a, b, c rispettivamente.

4.31. *Altre formule sui triangoli qualunque.*

— Teorema delle proiezioni.

$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta\,;\quad b=c\cos\alpha+a\cos\gamma\,;\quad c=a\cos\beta+b\cos\alpha\,.$$

— Teorema delle tangenti o di Nepero.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\,;\qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}}\,;\qquad \frac{a-c}{a+c}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}\,.$$

— Formule di Briggs.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\,;\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\,;\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\,;$$

(formule analoghe per gli altri due angoli).

4.32. *Lati dei poligoni regolari inscritti (l_n) e circoscritti (L_n) a una circonferenza.*

$$\begin{aligned}
l_3 &= r\sqrt{3}\,, & L_3 &= 2r\sqrt{3}\,;\\
l_4 &= r\sqrt{2}\,, & L_4 &= 2r\,;\\
l_5 &= \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,, & L_5 &= 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,;\\
l_6 &= r\,, & L_6 &= 2r\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\\
l_{10} &= \frac{r}{2}\big(\sqrt{5}-1\big)\,, & L_{10} &= 2r\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}\,;\\
l_n &= 2r\sin\frac{\pi}{n}\,, & L_n &= 2r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\,.
\end{aligned}$$

5 Radicali, potenze, esponenziali

5.1 Radicali e loro proprietà

5.1. *Radice n-esima aritmetica di un numero reale positivo.*

Se $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, e n è un numero naturale ≥ 2, si considera l'equazione nell'incognita reale x:

$$(*) \quad x^n = a \, (\geq 0) \, .$$

L'unica soluzione maggiore o uguale a zero di $(*)$ si chiama radice n-esima aritmetica di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$.

5.2. *Proprietà dei radicali aritmetici. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, ed m, n, p sono numeri naturali ≥ 2, allora:*

$$\begin{aligned}
\sqrt[mp]{x^{np}} &= \sqrt[m]{x^n} \\
\sqrt[m]{x \cdot y} &= \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} \\
\sqrt[m]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}} \quad (\textit{qui } y > 0) \\
\left(\sqrt[m]{x}\right)^n &= \sqrt[m]{x^n} \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x}
\end{aligned}$$

5.3. *Attenzione:*

$$\sqrt{x^2} = |x| \, .$$

5.4. *Radici dispari di un numero reale negativo.*

Se $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$, e n è un numero naturale *dispari* ≥ 3, si considera l'equazione nell'incognita reale x:

$$(*) \quad x^n = a \, (< 0) \, .$$

L'unica soluzione minore di zero di $(*)$ si chiama radice n-esima algebrica di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$.

Si noti che, purtroppo, il simbolo usato è lo stesso già usato per i radicali aritmetici, e questo può ingenerare notevoli confusioni. È molto importante segnalare, in particolare, che *non valgono*, per questi radicali, le proprietà dei radicali aritmetici. Per esempio

$$\sqrt[6]{x^2} \neq \sqrt[3]{x} \, ,$$

in quanto il primo membro è un numero non negativo, il secondo può anche essere negativo.

5.2 Richiami sulle potenze e le loro proprietà

5.5. *Potenze ad esponente naturale maggiore o uguale a* 2.

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n}\,.$$

Attenzione: in questa formula n *deve* essere maggiore o uguale a 2 perché il prodotto abbia senso.

5.6. *Potenze con esponente intero minore di* 2.

$$\begin{aligned} \forall\, a \in \mathbb{R} \quad & a^1 \stackrel{\text{def}}{=} a\,; \\ \forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad & a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1\,; \\ \forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad & a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}\,, \quad n > 0\,. \end{aligned}$$

N.B. Si noti che le tre formule sopra riportate sono delle *definizioni*: non esiste alcuna possibilità di dimostrarle (esiste invece una possibilità di *giustificarle*, che è tutto un altro discorso!). Lo stesso vale per le successive definizioni.

5.7. *Potenze con esponente razionale.*

$$\begin{aligned} \forall\, a \in \mathbb{R},\ a > 0, \quad & a^{m/n} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}\,, \\ se\ \frac{m}{n} > 0, \quad & 0^{m/n} \stackrel{\text{def}}{=} 0\,. \end{aligned}$$

Si noti che le potenze con esponente razionale non sono definite per basi negative. Questo significa che, per esempio,

$$(-8)^{1/3} \neq \sqrt[3]{(-8)}\,,$$

in quanto il secondo membro vale -2, mentre il primo non può avere senso, altrimenti si avrebbe

$$(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3}\,,$$

cosa palesemente impossibile perché il primo membro dovrebbe essere positivo, il secondo negativo.

5.8. *Potenze con esponente reale non razionale.*

La definizione di potenza in questo caso è decisamente più complessa ed esula dagli scopi di questo testo. Ci interessa solo quanto segue:

— la potenza a^α è definita *solo ed esclusivamente* per $a > 0$, salvo l'eccezione seguente;
— $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0, \quad 0^\alpha = 0$;
— la definizione di potenza viene data sostanzialmente ricorrendo alle approssimazioni successive del numero reale α mediante espansioni decimali finite; per esempio, sapendo che

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots\,,$$

si definisce $a^{\sqrt{2}}$, $a > 0$, come *limite* a cui tende la successione di numeri

$$a^1,\ a^{1.4},\ a^{1.41},\ a^{1.414},\ a^{1.4142},\ \ldots$$

al tendere dell'esponente al numero $\sqrt{2}$.

N.B. Si presti particolare attenzione al fatto, già segnalato, che mentre con esponenti interi la base delle potenze può essere un *numero reale qualunque*, eventualmente diverso da zero se l'esponente è nullo o negativo, con gli altri esponenti razionali o reali la base deve essere un numero *strettamente positivo* (solo eccezionalmente nullo).

5.9. *Proprietà delle potenze.*

— $a^1 = a$;
— $a^0 = 1$;
— $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
— $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
— $(a^m)^n = a^{mn}$.

5.10. *Ordine di precedenza nelle operazioni.*

La convenzione generale sulle espressioni contenenti diverse operazioni è che si eseguono per prime le operazioni con ordine di precedenza più elevato e via via tutte le altre; nel caso di operazioni con lo stesso ordine di precedenza, esse si eseguono nell'ordine in cui si presentano. Le parentesi alterano l'ordine, obbligando ad eseguire per prime le operazioni al loro interno. La potenza ha ordine di precedenza più elevato della moltiplicazione e della divisione: $3 \cdot 2^2 = 12$ e non 36. Un'ambiguità è però presente nella scrittura:

$$a^{m^n}.$$

Rispettando la regola generale essa dovrebbe significare $(a^m)^n = a^{mn}$, e in effetti così si comportano molte calcolatrici tascabili. Abitualmente invece la scrittura si interpreta come $a^{(m^n)}$, e quasi tutti i software di calcolo simbolico la leggono in questo modo. Prestare la massima attenzione!

5.3 Funzioni potenza e radice

5.11. *Funzioni potenza.*

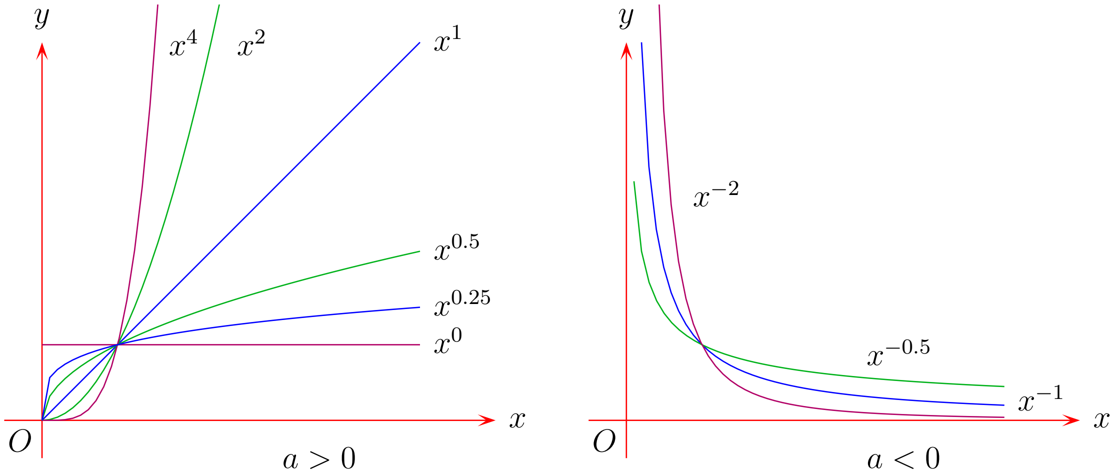
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ le funzioni reali $x \mapsto x^a$ si chiamano *funzioni potenza*. Tutte sono definite per $x > 0$, alcune anche per $x \leq 0$, a seconda del tipo di esponente, precisamente:

— Se a è un intero > 0, il dominio è $\mathbb{R}$.
— Se a è un intero < 0, il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
— Se a è non intero e > 0, il dominio è $[0, +\infty[$.
— Se a è non intero e < 0, il dominio è $]0, +\infty[$.
— Il caso $a = 0$ è particolare: x^0 non è definita per $x = 0$, ma si può riternerla prolungata per continuità anche in zero, senza per questo affermare che $0^0 = 1$.

5.12. *Funzioni radice.*

Se n è un naturale ≥ 2, le funzioni reali $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ si chiamano *funzioni radice* e hanno dominio $\mathbb{R}$ se n è dispari, dominio $[0, +\infty[$ se n è pari.

5.13. *Grafici delle funzioni potenza, per $x > 0$.*



5.4 Funzioni esponenziali e logaritmo

5.14. *Funzioni esponenziali.*

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1 \vee a > 1$, la funzione $x \mapsto a^x$, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si chiama *funzione esponenziale di base* a, e si indica, a volte, con $\exp_a(x)$. Il caso più importante è quello in cui $a = \mathrm{e}$ (numero di Nepero); in questo caso, oltre a e^x, si scrive anche, semplicemente $\exp(x)$.

5.15. *Proprietà delle funzioni esponenziali.*

$$\begin{aligned} a^x &> 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ a^0 &= 1 \\ a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ \left(a^{x_1}\right)^{x_2} &= a^{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Inoltre
$$\begin{cases} \text{se } 0 < a < 1 \text{ la funzione } x \mapsto a^x \text{ è strettamente decrescente,} \\ \text{se } a > 1 \text{ la funzione } x \mapsto a^x \text{ è strettamente crescente.} \end{cases}$$

5.16. *Funzioni logaritmo*

La proprietà di stretta monotonia (crescenza o decrescenza) delle funzioni esponenziali consente di introdurre le funzioni *logaritmo in base* a, come inverse delle funzioni esponenziali, e indicate con $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$, $0 < a < 1 \vee a > 1$. Nel caso $a = \mathrm{e}$ si parla di *logaritmo naturale* e si scrive, semplicemente, $x \mapsto \ln x$. Nel caso $a = 10$ si parla di *logaritmo decimale* e si scrive $x \mapsto \log x$. Queste notazioni (raccomandate dalle norme ISO) non sono comunque universali.

In sostanza, se $0 < a < 1 \vee a > 1$ e $b > 0$, l'equazione

$$a^x = b\,,$$

ammette una ed una sola soluzione

$$x = \log_a b\,.$$

Si può anche dire, ma con locuzione abbastanza impropria e che richiede la massima attenzione, che:

Il logaritmo in base a di b è l'esponente da dare ad a per avere b:

$$a^{\log_a b} = b\,.$$

5.17. *Proprietà dei logaritmi. Se $x > 0$ e $y > 0$,*

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^m &= m \log_a x \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

5.18. *Formule del cambiamento di base.*

$$a^b = c^{b \log_c a}\,, \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\,,$$

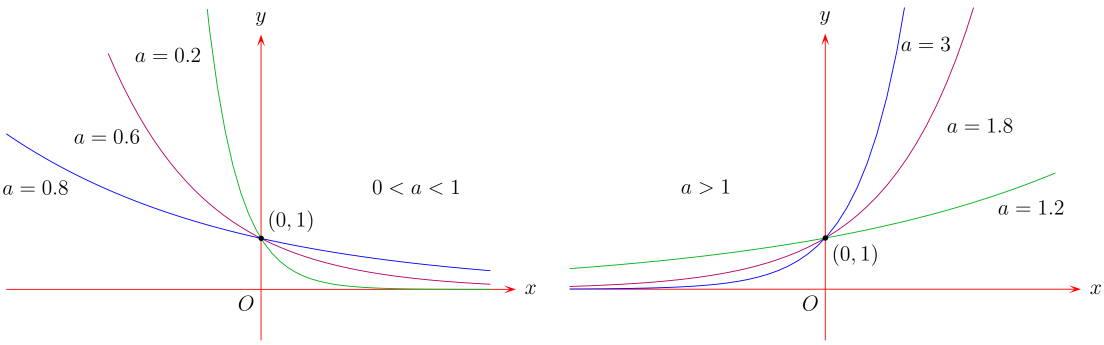
in particolare:

$$a^b = e^{b \ln a}\,, \qquad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}\,.$$

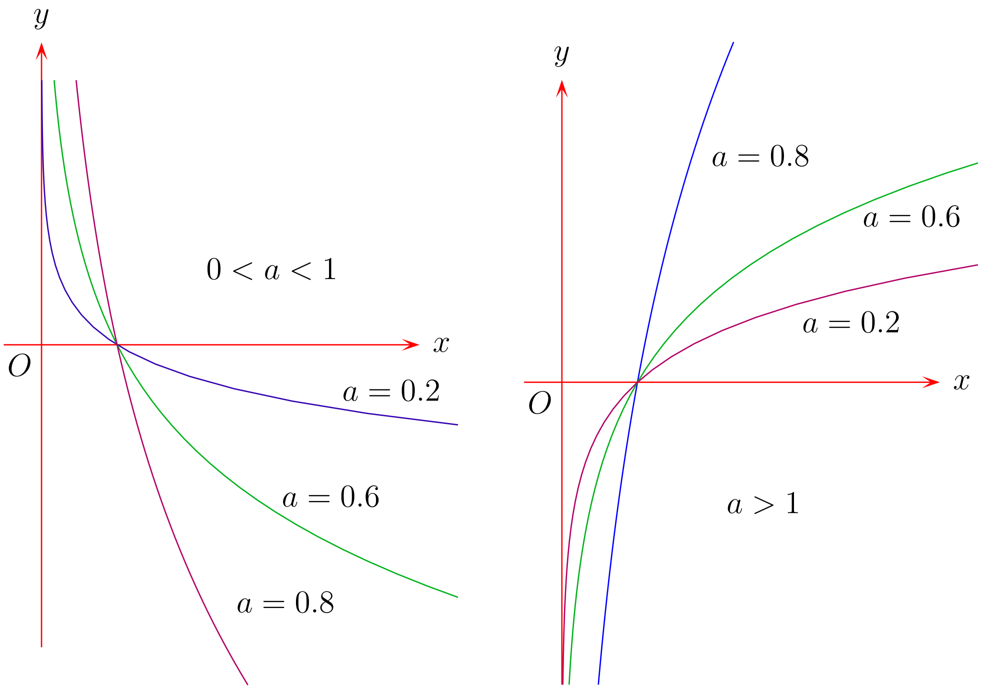
5.19. *Attenzione:*

$$\log_a x^2 = 2 \log_a |x|\,.$$

5.20. *Grafici delle funzioni esponenziali.*



5.21. *Grafici delle funzioni logaritmo.*


y
x
O
0 < a < 1
a = 0.2
a = 0.6
a = 0.8
y
x
O
a = 0.8
a = 0.6
a = 0.2
a > 1

6 Disequazioni

6.1 Generalità

Risolvere una disequazione in un'incognita reale significa trovare l'insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ dove $f(x) \lesseqqgtr g(x)$, essendo f e g due funzioni reali di variabile reale.

Se la disequazione è nella forma $f(x) \lesseqqgtr 0$, la diremo ridotta a *forma normale*.

Strettamente connesso è il problema della determinazione del *segno* di una funzione f reale di variabile reale, dove è richiesto di trovare:

— l'insieme degli x dove $f(x)$ è definita (*dominio naturale* di f);
— l'insieme degli x dove $f(x) = 0$;
— l'insieme degli x dove $f(x) > 0$;
— l'insieme degli x dove $f(x) < 0$.

6.1. *Proprietà delle disuguaglianze e delle disequazioni.*

— È sempre possibile aggiungere e togliere ad ambo i membri di una disequazione una stessa quantità, purché non si modifichi il dominio naturale dei due membri.
— È sempre possibile moltiplicare o dividere ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità, *strettamente positiva*, purché non si modifichi il dominio naturale dei due membri.
— Se si moltiplicano ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità strettamente negativa, che non modifichi il dominio naturale dei due membri, si *deve cambiare il verso* della disequazione.
— Si possono moltiplicare membro a membro due disequazioni *dello stesso verso* solo se tutti i quattro membri sono *positivi*.
— Si possono elevare al quadrato (in generale ad una potenza pari) ambo i membri di una disequazione, solo se entrambi i membri sono positivi.
— Si possono sempre elevare al cubo (in generale ad una potenza dispari) ambo i membri di una disequazione.

6.2 Il binomio di primo grado

6.2. *Risoluzione di una disequazione di primo grado.*

Si procede applicando le proprietà delle disequazioni.

$$ax + b \lesseqqgtr 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax \lesseqqgtr -b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \lesseqqgtr -\dfrac{b}{a} & \text{se} \quad a > 0 \\ x \gtreqqless -\dfrac{b}{a} & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}.$$

6.3. *Segno del binomio.*

È sufficiente risolvere la disequazione $ax + b > 0$, che fornisce l'insieme di positività; è poi immediato trovare di conseguenza quando il binomio è negativo e quando è nullo.

6.3 Il trinomio di secondo grado

6.4. *Segno del trinomio.*

Conviene usare il "metodo della parabola": un trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ ha come grafico una parabola con la concavità verso l'alto o il basso a seconda del valore di a, ed interseca eventualmente l'asse delle ascisse nei due punti corrispondenti alle radici del trinomio. Questa osservazione permette di decidere subito il segno del trinomio.

6.5. *Risoluzione di una disequazione di secondo grado:* $ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$.

Conviene determinare preventivamente il segno del trinomio a primo membro, dopodiché la risoluzione della disequazione è immediata.

6.4 Disequazioni di grado superiore al secondo, o fratte. Sistemi di disequazioni

6.6. *Disequazioni di grado superiore al secondo, o fratte.*

Procedere nel seguente modo:
— Determinare il dominio naturale.
— Ridurre a forma normale: $f(x) \lesseqgtr 0$.
— Scomporre (sia il numeratore che l'eventuale denominatore) in fattori di cui si sappia trovare il segno.
— Determinare il segno complessivo utilizzando la regola dei segni, e servendosi di una opportuna rappresentazione grafica.
— Trarre le conclusioni.

6.7. *Sistemi di disequazioni.*

Si tratta di trovare le soluzioni comuni a tutte le disequazioni. È utile servirsi di un'opportuna rappresentazione grafica, prestando particolare attenzione alla differenza tra il tipo di grafico utilizzato per le disequazioni di grado superiore al secondo o fratte (che possiamo chiamare "grafico di segno") e quello utilizzato in questo caso (che possiamo chiamare "grafico vero-falso").

6.5 Disequazioni irrazionali

L'idea base per risolvere le disequazioni irrazionali è quella di elevare ad opportune potenze, in modo da ridurre la disequazione irrazionale ad una razionale. L'eventuale elevazione ad una potenza dispari non comporta problemi, mentre l'elevazione ad una potenza pari è possibile solo se ambo i membri sono positivi. Inoltre un'elevazione non ben "programmata" può complicare le cose anziché semplificarle.

6.8. *Metodo generale.*

Procedere nel seguente modo:
— Determinare il dominio naturale.
— Riscrivere la disequazione in modo che una successiva elevazione di ambo i membri ad una opportuna potenza semplifichi la risoluzione.
— Se si deve elevare ad una potenza dispari non ci sono problemi.
— Se si deve elevare ad una potenza pari, valutare il segno di ambo i membri, tenendo conto che si può elevare solo se essi sono positivi. Nel caso in cui entrambi siano negativi basta cambiare il segno (e quindi il verso!); nel caso in cui siano di segno discorde, è facile trarre le conclusioni tenendo conto del verso della disequazione.

I casi più frequenti nelle applicazioni sono quelli trattati nei seguenti due "casi speciali".

6.9. *Un primo caso speciale:* $f(x) \geq \sqrt{g(x)}$, *oppure* $f(x) > \sqrt{g(x)}$.

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & \geq & 0 \\ \big(f(x)\big)^2 & \geq & g(x) \end{cases}, \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & \geq & 0 \\ \big(f(x)\big)^2 & > & g(x) \end{cases}.$$

6.10. *Un secondo caso speciale:* $f(x) \leq \sqrt{g(x)}$, *oppure* $f(x) < \sqrt{g(x)}$.

La disequazione è equivalente all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) & \geq & 0 \\ \big(f(x)\big)^2 & \leq & g(x) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & < & 0 \end{cases}.$$

oppure

$$\begin{cases} f(x) & \geq & 0 \\ \big(f(x)\big)^2 & < & g(x) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & < & 0 \end{cases}.$$

6.6 Disequazioni con valori assoluti

6.11. *Disequazioni elementari.*

— $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{nessuna soluzione} & \text{se} \quad a \leq 0 \\ -a < x < a & \text{se} \quad a > 0 \end{cases}.$

— $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{nessuna soluzione} & \text{se} \quad a < 0 \\ -a \leq x \leq a & \text{se} \quad a \geq 0 \end{cases}.$

— $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty & \text{se} \quad a < 0 \\ x < -a \vee x > a & \text{se} \quad a \geq 0 \end{cases}.$

— $|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty & \text{se} \quad a \leq 0 \\ x \leq -a \vee x \leq a & \text{se} \quad a > 0 \end{cases}.$

6.12. *Le altre disequazioni.*

Non sono richieste tecniche particolari per le disequazioni contenenti valori assoluti. Basta ricordare la definizione di valore assoluto,

$$\mathrm{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$

e distinguere opportunamente tutti i casi che si possono presentare, facendo alla fine l'*unione* dei risultati trovati nei vari casi.

6.7 Disequazioni trigonometriche

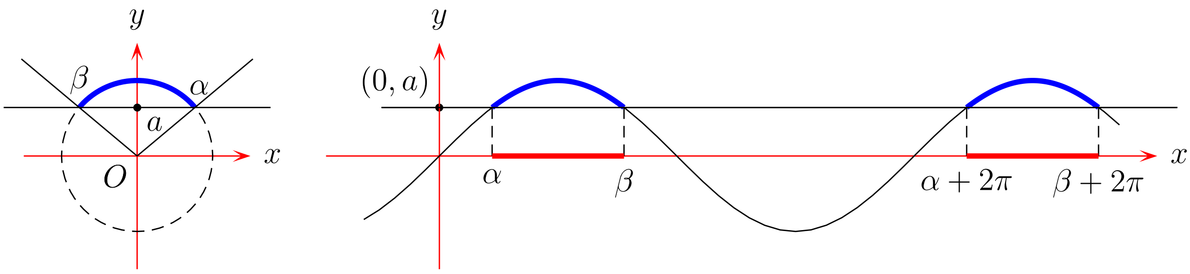
6.13. *Disequazioni elementari.*

— $\sin(x) \lesseqgtr a$;

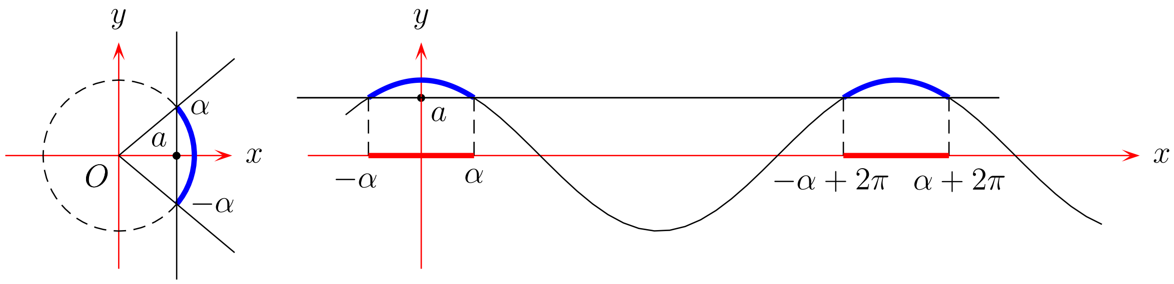
— $\cos(x) \lesseqgtr a$;

— $\mathrm{tg}(x) \lesseqgtr a$.

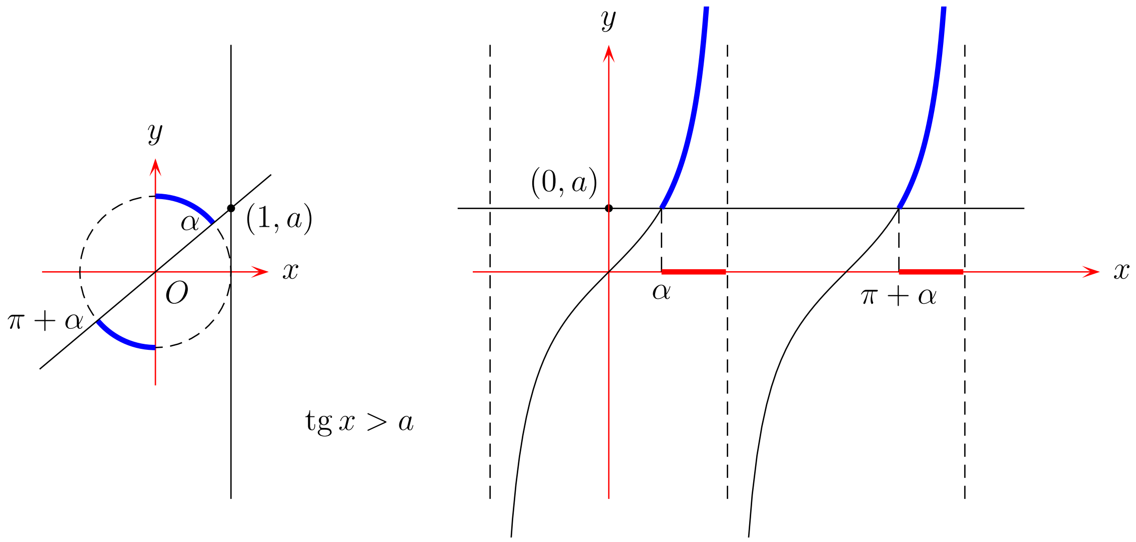
Conviene ricordare la definizione delle funzioni trigonometriche mediante la circonferenza goniometrica, oppure i grafici delle funzioni stesse, ed operare come nei seguenti esempi.



$\sin x > a$



$\cos x > a$



$\operatorname{tg} x > a$

6.14. *Disequazioni di secondo grado in* sin, cos, tg.

— $a \sin^2 x + b \sin x + c \lesseqgtr 0$

— $a \cos^2 x + b \cos x + c \lesseqgtr 0$

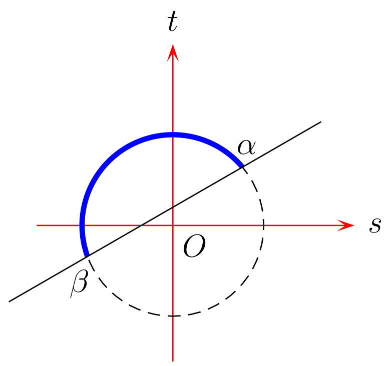
— $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c \lesseqgtr 0$

Si risolvono ponendo $\sin x = t$, oppure $\cos x = t$, oppure $\operatorname{tg} x = t$, e riconducendosi a disequazioni elementari.

6.15. *Disequazioni lineari in* sin *e* cos.

$$a \cos x + b \sin x + c \lesseqgtr 0 \,.$$

Si risolvono ponendo $\cos x = s$, $\sin x = t$ e rappresentando graficamente, nel piano Ost, la retta $as + bt + c = 0$ e la circonferenza (goniometrica) $s^2 + t^2 = 1$. Successivamente è facile controllare se la disequazione è verificata “sopra” o “sotto” la retta, individuando così l’arco di circonferenza in cui la disequazione data è verificata. Si veda l’esempio proposto di seguito.



Le stesse disequazioni si possono alternativamente ridurre a disequazioni elementari come segue:

$$a \cos x + b \sin x + c = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) + c \,.$$

Detto α l'unico angolo (con $0 \leq \alpha < 2\pi$) tale che:

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

si ottiene

$$a\cos x + b\sin x + c = \sqrt{a^2+b^2}\big(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x\big) + c = \sqrt{a^2+b^2}\big(\sin(\alpha+x)\big) + c\,,$$

e a questo punto la disequazione si riduce ad un elementare con la posizione $x+\alpha = t$.

6.16. *Disequazioni omogenee di secondo grado in* sin *e* cos*.*

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d \lesseqgtr 0\,.$$

Si risolvono usando le formule di bisezione e duplicazione:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,, \qquad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,,$$

che permettono di trasformare la disequazione in una lineare in seno e coseno, con la variabile $2x$.

6.17. *Disequazioni simmetriche o semisimmetriche in seno e coseno.*

$$a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c \lesseqgtr 0\,.$$

Si risolvono con la sostituzione $x = t + \pi/4$, che le trasforma in una disequazione di secondo grado in seno e coseno.

6.18. *Le altre disequazioni.*

Si risolvono cercando di trasformarle in uno dei tipi predetti, usando opportunamente le formule trigonometriche, oppure cercando di scomporle in fattori.

6.8 Disequazioni logaritmiche ed esponenziali

6.19. *Disequazioni esponenziali elementari.*

$$a^x \lesseqgtr b\,.$$

Se $b \leq 0$ la risoluzione è immediata, tenendo conto che a^x è strettamente maggiore di 0 per ogni x. Se $b > 0$, basta prendere i logaritmi in base a di ambo i membri, tenendo conto che se $a > 1$ si mantiene il verso, se $0 < a < 1$ si deve cambiare il verso. Successivamente si deve ricordare che $\log_a a^x = x$.

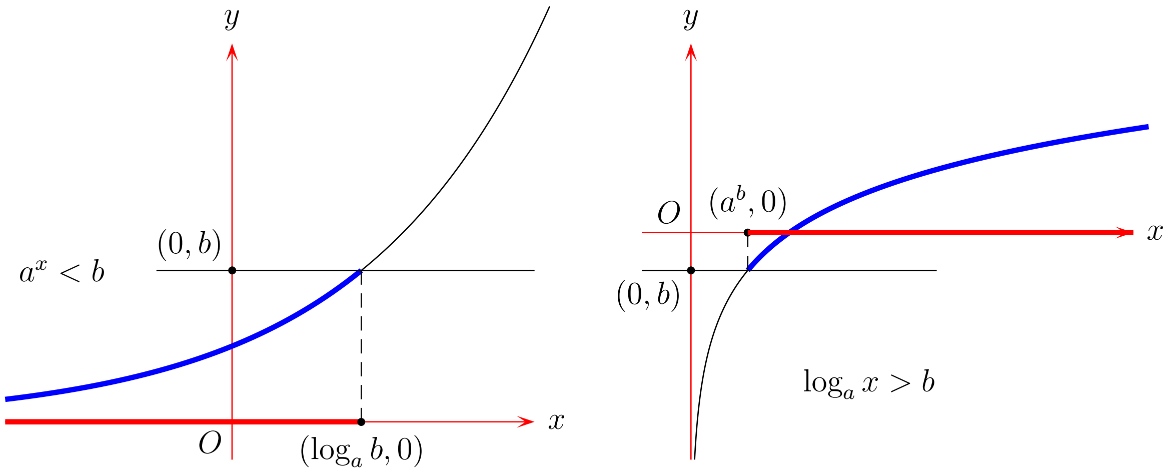
6.20. *Disequazioni logaritmiche elementari.*

$$\log_a x \lesseqgtr b\,.$$

Bisogna innanzitutto tenere conto che deve essere $x > 0$ (dominio naturale). Poi basta prendere l'esponenziale in base a di ambo i membri, tenendo conto che se $a > 1$ si mantiene il verso, se $0 < a < 1$ si deve cambiare il verso. Successivamente si deve ricordare che

$$a^{\log_a x} = x\,, \quad \forall\, x > 0\,.$$

L'uso dei grafici delle funzioni esponenziali e logaritmo è molto utile e facilita la risoluzione. Si vedano gli esempi che seguono.



6.21. *Disequazioni del tipo* $\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x + \gamma \lesseqgtr 0$ *oppure* $\alpha \cdot \log_a^2 x + \beta \cdot \log_a x + \gamma \lesseqgtr 0$

Basta porre $a^x = t$ oppure $\log_a x = t$ e poi ridursi a disequazioni elementari.

6.22. *Le altre disequazioni.*

Occorre procedere utilizzando opportunamente le proprietà delle potenze e dei logaritmi o scomponendo in fattori. Si ricordi sempre di trovare preventivamente il dominio naturale.

6.9 Funzioni elementari e dominio naturale

6.23. *Ricerca del dominio naturale di una funzione reale di variabile reale.*

Le funzioni reali di variabile reale più comuni nelle applicazioni sono le *funzioni elementari*, ovvero i polinomi, le funzioni radici, potenza, esponenziali, logaritmo, trigonometriche, le loro inverse, e quelle ottenute da esse mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione. Per la ricerca del dominio naturale di queste funzioni ci si può servire del seguente schema.

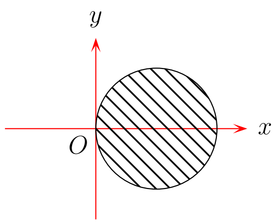
— I denominatori devono essere diversi da 0.
— I radicandi di radici di indice pari devono essere maggiori od uguali a 0.
— L'argomento dei logaritmi deve essere maggiore di 0.
— La base dei logaritmi deve essere maggiore di 0 e diversa da 1.
— L'argomento delle funzioni arcsin e arccos deve essere compreso tra -1 ed 1, compresi gli estremi.
— Potenze con base variabile ed esponente fisso.

  - Se l'esponente è un intero maggiore di zero, non ci sono limitazioni.
  - Se l'esponente è un intero minore od uguale a zero la base deve essere diversa da 0.
  - Se l'esponente è non intero e maggiore di zero la base deve essere maggiore o uguale a 0.
  - Se l'esponente è non intero e minore o uguale a zero, la base deve essere maggiore di 0.
- Potenze con base fissa (reale positiva) ed esponente variabile: non ci sono limitazioni.
- Potenze con base ed esponente variabile: si tratta di un caso complesso, in cui bisognerebbe valutare accuratamente le varie possibilità sia per la base che per l'esponente. In genere si accetta che la base debba essere maggiore di zero e non si pongono condizioni sull'esponente (tranne ovviamente le condizioni perchè l'esponente stesso sia definito!): questa scelta consente di sfruttare la formula, assai utile, del cambiamento di base

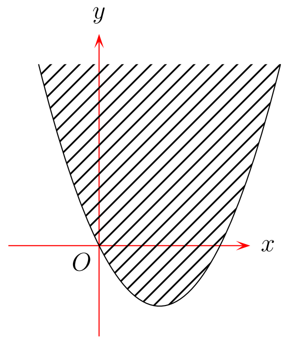
$$\big(f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}\,.$$

6.10 Disequazioni in due incognite

Si tratta di disequazioni riducibili al tipo $f(x,y) \lesseqgtr 0$, ove f è un'opportuna funzione di due variabili. La loro risoluzione richiede la rappresentazione grafica dell'insieme, generalmente una curva, $f(x,y)=0$, dopodiché le conclusioni sono in genere immediate. Si noti che di solito per le soluzioni di queste disequazioni si può dare solo una rappresentazione grafica in un piano cartesiano. Si vedano gli esempi che seguono.

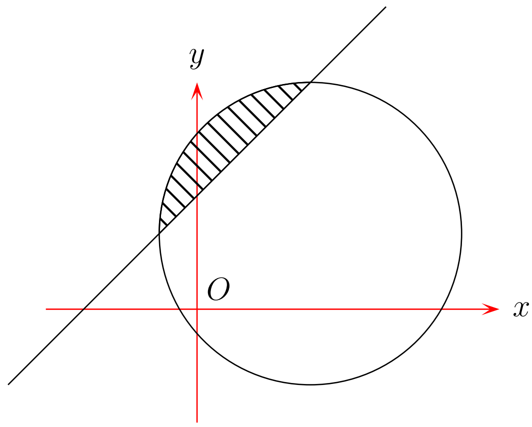


$x^2+y^2-2x<0$



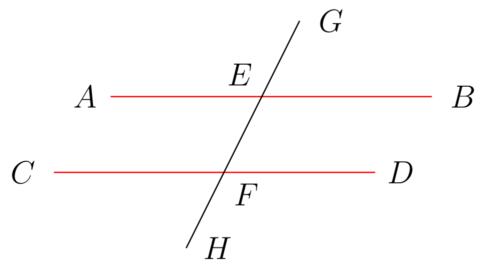
$y>x^2-2x$

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2-12x-8y-3<0 \\ y>x+2 \end{cases}$$



7 Geometria euclidea

7.1. *Rette parallele tagliate da una trasversale.*



Proprietà:

— Coppie di angoli alterni interni: $B\widehat{E}H = C\widehat{F}G$; $A\widehat{E}H = D\widehat{F}G$.

— Coppie di angoli alterni esterni: $B\widehat{E}G = C\widehat{F}H$; $A\widehat{E}G = D\widehat{F}H$.

— Coppie di angoli corrispondenti: $B\widehat{E}G = D\widehat{F}G$; $A\widehat{E}G = C\widehat{F}G$; $A\widehat{E}H = C\widehat{F}H$; $B\widehat{E}H = D\widehat{F}H$.

— Coppie di angoli coniugati interni: $B\widehat{E}H + D\widehat{F}G = \text{angolo piatto}$; $A\widehat{E}H + C\widehat{F}G = \text{angolo piatto}$.

— Coppie di angoli coniugati esterni: $B\widehat{E}G + D\widehat{F}H = \text{angolo piatto}$; $A\widehat{E}G + C\widehat{F}H = \text{angolo piatto}$.

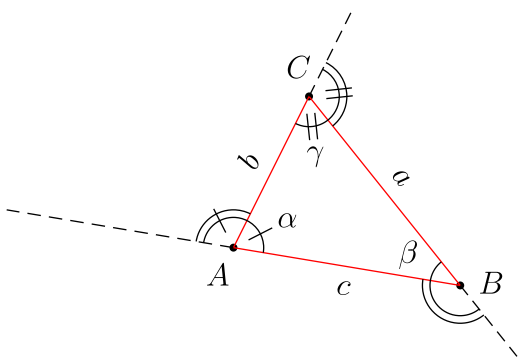
7.2. *Bisettrici di due angoli adiacenti.*

Le bisettrici di due angoli adiacenti sono semirette tra di loro perpendicolari.

7.3. *Bisettrici degli angoli di due rette incidenti.*

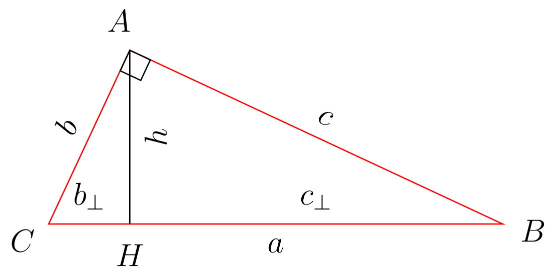
Le bisettrici degli angoli formati da due rette incidenti sono due rette tra di loro perpendicolari.

7.4. *Alcune proprietà dei triangoli.*



— In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due.
— In ogni triangolo a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.
— In ogni triangolo ciascuno angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti.

7.5. *Convenzioni sui triangoli rettangoli.*



7.6. *Teorema di Pitagora.*

$$a^2 = b^2 + c^2 .$$

7.7. *Teoremi di Euclide.*

$$b^2 = b_\perp \cdot a , \qquad c^2 = c_\perp \cdot a , \qquad h^2 = b_\perp \cdot c_\perp .$$

7.8. *Inscrivibilità in una semicirconferenza.*

Ogni triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza e ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.

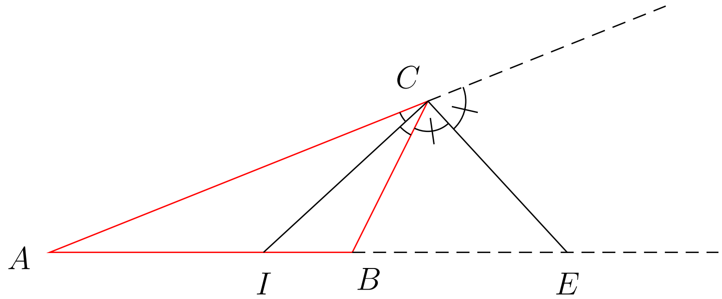
7.9. *Punti notevoli di un triangolo.*

— Circocentro: punto d'incontro degli assi dei lati (rette perpendicolari nel punto medio). È il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. È interno al triangolo per i triangoli acutangoli, esterno per quelli ottusangoli, nel punto medio dell'ipotenusa per i triangoli rettangoli.
— Baricentro: punto d'incontro delle mediane (segmenti che congiungono ciascun vertice con il punto medio del lato opposto). È sempre interno al triangolo.
— Ortocentro: punto di incontro delle altezze o dei loro prolungamenti; le altezze di un triangolo si ottengono tirando da ciascun vertice la perpendicolare al lato opposto o al suo prolungamento e considerando il segmento di perpendicolare compreso tra il vertice e l'intersezione con il lato opposto o il suo prolungamento. È interno al triangolo per i triangoli acutangoli, esterno per quelli ottusangoli, nel vertice dell'angolo retto per i triangoli rettangoli.
— Incentro: punto d'incontro delle bisettrici degli angoli interni. È il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. È sempre interno al triangolo.
— Ex-centri: punti di incontro delle semirette bisettrici di due angoli esterni e dell'angolo interno ad essi non adiacente. Sono i tre centri delle circonferenze ex-inscritte nel triangolo.

7.10. *Retta di Eulero.*

In ogni triangolo l'ortocentro H, il baricentro G e il circocentro C sono allineati. Inoltre $HG = 2GC$.

7.11. *Bisettrici degli angoli interni ed esterni.*



- La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati rimanenti: $AI\colon IB = AC\colon CB$.
- La bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra il prolungamento del lato opposto in un punto tale che le sue distanze dagli altri vertici sono proporzionali agli altri lati: $AE\colon EB = AC\colon CB$.

7.12. *Somma degli angoli interni.*

La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $n-2$ angoli piatti. In particolare la somma degli angoli interni di un triangolo è 1 angolo piatto.

7.13. *Parallelogrammi.*

Un parallelogramma è un quadrilatero convesso che ha le due coppie di lati opposti paralleli. Ogni parallelogramma gode delle seguenti proprietà caratteristiche (cioè equivalenti alla definizione):

- Le due coppie di lati opposti sono congruenti.
- Ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti.
- Le due diagonali si dividono scambievolmente a metà.
- Il quadrilatero ha due coppie di angoli opposti congruenti.
- Il quadrilatero ha un centro di simmetria.

Casi particolari:

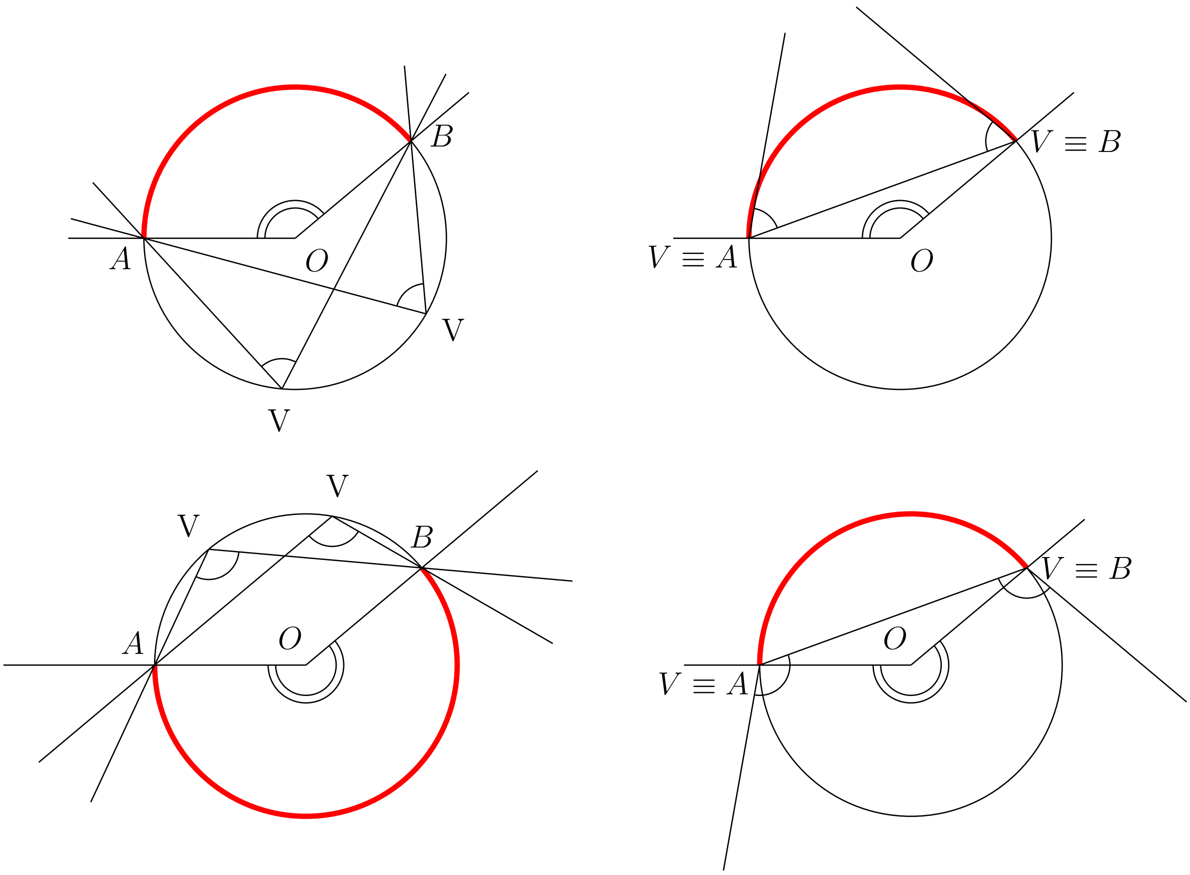
- *Rombo*: un parallelogramma che abbia i quattro lati congruenti è un *rombo*. Un parallelogramma è un rombo se e solo se le sue diagonali sono perpendicolari oppure se e solo se le sue diagonali sono bisettrici degli angoli interni.
- *Rettangolo*: un parallelogramma con un angolo retto (e quindi con tutti gli angoli retti) è un rettangolo. Un parallelogramma è un rettangolo se e solo se le sue diagonali sono congruenti.
- *Quadrato*: un rettangolo che sia anche un rombo è un quadrato. Un quadrilatero è un quadrato se e solo se ha i quattro lati congruenti e i quattro angoli congruenti, oppure se e solo se ha le diagonali congruenti e perpendicolari, o infine se e solo se ha le diagonali congruenti e bisettrici degli angoli interni.

7.14. *Angoli al centro e alla circonferenza.*

Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono tutti tra di loro congruenti e congruenti alla metà del corrispondente angolo al centro. Tra gli angoli alla circonferenza sono da considerare anche i due che hanno una lato secante e uno tangente.

Come conseguenza si ha che angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda sono congruenti se hanno il vertice sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$, sono supplementari se non hanno il vertice sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$.

Le figure che seguono si riferiscono a situazioni con archi minori e, rispettivamente, maggiori di una semicirconferenza.



7.15. *Quadrilateri inscrivibili.*

Un quadrilatero convesso è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli angoli opposti sono supplementari.

7.16. *Quadrilateri circoscrivibili.*

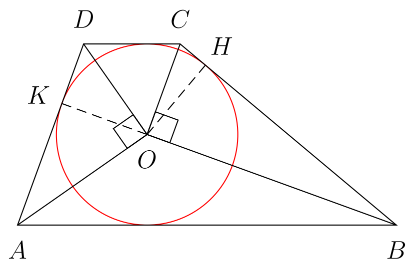
Un quadrilatero convesso è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se le somme delle due coppie di lati opposti sono congruenti.

7.17. *Teorema di Tolomeo.*

In un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.

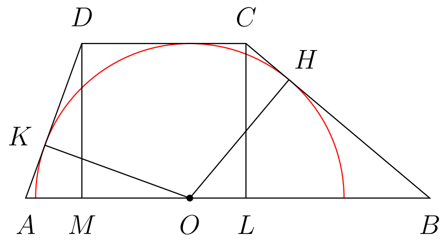
7.18. *Trapezi circoscritti ad una circonferenza.*

I triangoli $\triangle AOD$ e $\triangle BOC$ sono sempre rettangoli.



7.19. *Trapezi circoscritti ad una semicirconferenza.*

I triangoli $\triangle CLB$ e $\triangle OHB$ sono congruenti. Lo stesso dicasi dei triangoli $\triangle AMD$ e $\triangle AKO$.

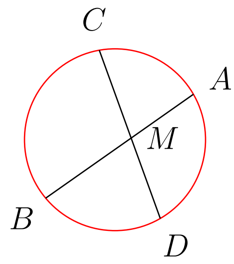


7.20. *Teorema delle due corde.*

Date due corde AB e CD di una circonferenza, si ha

$$MA : MC = MD : MB \,.$$

Ovvero le due parti di una corda sono gli estremi, le due parti dell'altra i medi di una proporzione.

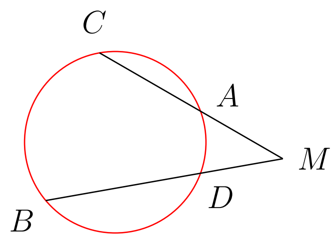


7.21. *Teorema delle due secanti (analogo al precedente).*

Date due secanti MB e MC ad una circonferenza, si ha

$$MA : MD = MB : MC \,.$$

Ovvero le due parti di una secante sono gli estremi, le due parti dell'altra i medi di una proporzione.

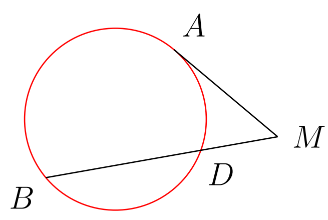


7.22. *Teorema della secante e della tangente.*

Date una tangente MA ed una secante MB ad una circonferenza, si ha

$$MD : MA = MA : MB \,.$$

Ovvero le due parti della secante sono gli estremi, la tangente il medio proporzionale di una proporzione.



7.23. *Sezione aurea di un segmento.*

Dato un segmento AB, si chiama sua sezione aurea il segmento AC che è medio proporzionale tra l'intero segmento AB e la parte restante CB:

$$AB : AC = AC : CB\,.$$

Se l è la lunghezza di AB, la sezione aurea è

$$\frac{l}{2}(\sqrt{5}-1)\,.$$

Tra le applicazioni inmportanti di questo concetto è il teorema sul lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza.

7.24. *Lato del decagono regolare inscritto in un circonferenza.*

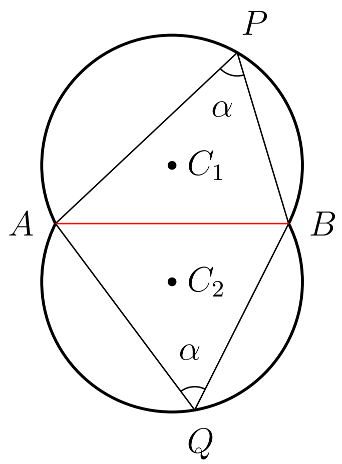
Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio.

7.25. *Luoghi geometrici.*

Luogo geometrico è l'insieme di tutti i punti (del piano o dello spazio), che godono di una determinata proprietà di tipo geometrico.

Tra i luoghi geometrici importanti figurano i seguenti.

— *Circonferenza*: luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.
— *Cerchio*: luogo dei punti del piano aventi distanza minore od uguale ad un dato numero reale r da un punto detto centro.
— *Asse di un segmento*: luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.
— *Bisettrice di un angolo*: luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo. Il luogo dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti è costituito dalle due rette, perpendicolari tra loro, che sono bisettrici delle coppie di angoli opposti al vertice ed individuati dalle due rette date.
— Luogo dei punti del piano che vedono un dato segmento AB sotto un angolo assegnato: è costituito da *due archi di circonferenza*, aventi AB come corda.



7.26. *Qualche altra lunghezza, area o volume notevole.*

— Area del rombo: semiprodotto delle diagonali.
— Area del trapezio: semisomma delle basi per l'altezza.
— Volume di un parallelepipedo, di un prisma o di un cilindro di area di base $\mathcal{S}$ e altezza h:

$$\mathcal{V} = \mathcal{S} \cdot h\,.$$

Se il parallelepipedo, prisma, o cilindro è *retto*, l'altezza coincide con uno degli spigoli laterali.
Un cilindro circolare retto si dice equilatero se l'altezza è lunga quanto il diametro di base, ovvero se la sua sezione con un piano per l'asse è un quadrato.
— Volume di una piramide o di un cono di area di base $\mathcal{S}$ e altezza h:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{S} \cdot h\,.$$

Se la base della piramide è un poligono circoscrivibile ad una circonferenza che ha centro coincidente con la proiezione del vertice sulla base, la piramide si dice *retta*. In questo caso si chiama *apotema* l'altezza di una qualunque delle facce laterali della piramide. Se il poligono di base è regolare, la piramide si dice *regolare*. Un cono circolare si dice retto se la proiezione del vertice sulla base coincide col centro della circonferenza di base.
Un cono circolare retto si dice equilatero se l'apotema è lunga quanto il diametro di base, ovvero se la sua sezione con un piano passante per l'asse è un triangolo equilatero.
— Superficie laterale di un cono circolare retto: se r è il raggio di base e a è l'apotema:

$$\mathcal{S}_l = 2\pi r a\,.$$

— Volume di un tronco di cono o di piramide. Se $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ sono le aree delle due basi e h è l'altezza, si ha:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{S} + \mathcal{S}' + \sqrt{\mathcal{S}\mathcal{S}'}\right)\,.$$

— Superficie laterale di un tronco di cono circolare retto. Se r_1 ed r_2 sono i due raggi di base e a è l'apotema, si ha:

$$\mathcal{S}_l = 2\pi r a\,.$$

— Area della superficie sferica:

$$4\pi r^2\,.$$

— Volume della sfera:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

— Area della calotta sferica e della zona sferica. Se r è il raggio della sfera a cui appartengono la calotta o la zona, e h è l'altezza, si ha:

$$\mathcal{S} = 2\pi r h\,.$$

Ricordiamo che si chiama calotta sferica ciascuna delle due parti individuate su una superficie sferica da un piano; si chiama zona sferica la parte di superficie sferica compresa tra due piani paralleli.

— Volume del segmento sferico a due basi. Se R_1 ed R_2 sono i due raggi delle basi, e h l'altezza si ha:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3R_1^2 + 3R_2^2)\,.$$

Ricordiamo che si chiama segmento sferico a due basi la parte di sfera compresa tra due piani paralleli (è cioè il volume corrispondente alla zona sferica).

— Volume del segmento sferico ad una base. Se R è il raggio della base e h l'altezza, basta porre $R_2 = 0$ nella formula precedente:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3R^2)\,.$$

Detto r il raggio della sfera, la formula si può anche scrivere:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)\,.$$

— Volume del settore sferico. Se r è il raggio della sfera e h l'altezza del settore, si ha:

$$\mathcal{V} = \frac{2}{3}\pi R^2 h\,.$$

Ricordiamo che si chiama settore sferico il solido generato dalla rotazione di un settore circolare attorno ad un diametro del cerchio a cui il settore appartiene, con la condizione che il diametro non attraversi il settore. Si tratta in sostanza di un segmento sferico a una o due basi, con l'aggiunta, o la sottrazione di opportuni coni.